

اجماع زمان ثابت در سامانه‌های چندکارگزار تک‌انتگرال‌گیر مرتبه کسری

حسین زمانی، وحید جوهری مجد و خسرو خاندانی

مقایسه با مدل‌های کلاسیک با مرتبه صحیح است. بنابراین می‌توان اغلب سیستم‌های فیزیکی را که میزان تأثیرپذیری رفتار آینده آن از رفتار گذشته‌شان زیاد است، در قالب معادلات دیفرانسیل و انتگرال مرتبه کسری مدل نمود. به عنوان اولین گام‌های مطالعاتی در این زمینه می‌توان به [۲] و [۳] اشاره کرد که این کارها بیشتر به جنبه ریاضی مسأله توجه داشته‌اند. در زمینه کنترل هم حساب مرتبه کسری مورد استفاده قرار گرفته است. با استفاده از کنترل‌کننده‌های کسری می‌توان به عملکرد بهتر و مقاوم^۳ در مقایسه با کنترل‌کننده‌های کلاسیک مرتبه صحیح دست یافت و از درجات آزادی بیشتری بهره برد. کنترل‌کننده‌های PID مرتبه کسری ($PI^{\lambda}D^{\mu}$) در [۴] معرفی شده‌اند. در کنترل‌کننده‌های مرتبه کسری، عملگرهای انتگرال‌گیر و مشتق‌گیر دارای مرتبه کسری هستند [۵]. همچنین در [۶] نشان داده شده که کنترل‌کننده‌های مرتبه کسری نسبت به کنترل‌کننده‌های کلاسیک در عمل از کارایی بیشتر برخوردارند. کنترل‌کننده‌های مرتبه کسری در کاربردهای عملی نیز پیاده‌سازی شده‌اند که از جمله آنها می‌توان به هواپیماهای بدون سرنشین [۷]، توربین‌های بادی [۸]، تنظیم‌کننده‌های ولتاژ [۹]، سیستم‌های آشوب‌گونه [۱۰] و بسیاری از فرایندهای شیمیایی و صنعتی دیگر اشاره نمود.

در دهه‌های اخیر، مطالعه سامانه‌های چندکارگزار^۵ که شامل تعدادی کارگزار هستند که با همکاری با یکدیگر به دنبال دست‌یافتن به یک هدف مشترک تعریف شده هستند، مورد توجه قرار گرفته است و به عنوان یک مسئله پژوهشی مهم با کاربردهای متنوع در ربات‌های متحرک، فضاپیماهای بدون سرنشین، تنظیم موقعیت ماهواره‌ها و برنامه‌ریزی سیستم‌های هوشمند شبکه‌های برق در نظر گرفته می‌شود [۱۱]. کنترل مشارکتی سیستم‌های چندکارگزار نیز در سال‌های اخیر مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. از جمله سناریوهای قابل تعریف در این حوزه می‌توان به اجماع^۶ کنترل آرایش^۷ و کنترل مهار^۸ اشاره نمود. اجماع در سامانه چند کارگزار به این معنی است که کارگزاران موجود در سامانه که می‌توانند اطلاعات را انتقال دهند، بر اساس پروتکل یا الگوریتم خاصی بر یکدیگر تأثیر می‌گذارند و سرانجام با گذشت زمان در یک مقدار مشخص به اجماع می‌رسند. به طور کلی، مسئله اجماع در سامانه‌های چندکارگزار به دو دسته مسئله اجماع بدون رهبر^۹ [۱۲] و مسئله اجماع

چکیده: در این مقاله، مسئله اجماع زمان ثابت در سامانه‌های چندکارگزار تک‌انتگرال‌گیر مرتبه کسری مورد مطالعه قرار گرفته است. اثر حافظه با استفاده از انتگرال و مشتق کسری ریمان-لیوویل در دینامیک کارگزاران در نظر گرفته شده و به منظور همگرایی کارگزاران، یک پروتکل کنترل مرتبه کسری مبتنی بر سیگنال خطای بین کارگزاران همسایه ارائه گردیده است. با استفاده از قضیه پایداری لیاپانوف، یک تابع لیاپانوف معرفی شده که نشان می‌دهد کارگزاران طی یک زمان نشست مشخص، همگرا شده و یک حد بالا برای آن زمان نشست تعیین می‌گردد. مزیت حد معرفی شده برای زمان نشست، وابسته نبودن آن به شرایط اولیه کارگزاران است. نهایتاً شبیه‌سازی‌هایی برای تأیید روش معرفی شده ارائه گردیده است.

کلیدواژه: کارگزارهای تک‌انتگرال‌گیر مرتبه کسری، سیستم چندکارگزاره، اجماع، همگرایی زمان ثابت.

۱- مقدمه

در دهه‌های اخیر، حساب مرتبه کسری^۱ در حوزه‌های مختلف علوم از جمله مهندسی مورد توجه قرار گرفته است. اهمیت سیستم‌های مدل شده با استفاده از مشتق و انتگرال مرتبه کسری در امکان وارد کردن اثر حافظه در مدل است. همچنین مدل نمودن سیستم‌هایی که در برخی از محیط‌های پیچیده کار می‌کنند، با استفاده از حساب مرتبه کسری ممکن می‌شود؛ به عنوان مثال، وسایل نقلیه هوایی در محیط‌های تحت تأثیر آب و هوا، اتومبیل‌های در حال حرکت در سطح جاده‌های حاوی مواد ارتجاعی-لزجی^۲ و هواپیماهای بدون سرنشین در محیط‌های پیچیده با تعداد زیادی ذرات. سیستم‌های مرتبه کسری می‌توانند موارد اینچنینی را با دقت بیشتر توصیف کنند. همچنین برخی از فرایندها مانند انتقال حرارت، انتشار امواج، فرآیند گلوکز-انسولین و ... وجود دارند که ذاتاً دارای مرتبه کسری هستند [۱]. با توجه به این که عملکرد یک سیستم فیزیکی تحت تأثیر گذشته خود است، باید در مدل‌سازی، این اثر گذشته برای پیش‌بینی رفتار آینده لحاظ گردد. این یکی از مزایای انتگرال‌ها و مشتقات مرتبه کسری در

این مقاله در تاریخ ۶ آذر ماه ۱۴۰۰ دریافت و در تاریخ ۲۷ دی ماه ۱۴۰۱ بازنگری شد.

حسین زمانی، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران، (email: zamani.hossein1371@gmail.com).

وحید جوهری مجد (نویسنده مسئول)، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران، (email: majd@modares.ac.ir).

خسرو خاندانی، گروه مهندسی برق، دانشگاه اراک، اراک، ایران، (email: k-khandani@araku.ac.ir).

1. Fractional Order Calculus

2. Viscoelastic

3. Robust

4. Proportional-Integral-Derivative

5. Multi-Agent Systems

6. Consensus

7. Formation

8. Containment

9. Leaderless

چندین سامانه غیرخطی مرتبه اول و مرتبه دوم هستند. مسئله کنترل ردیابی اجماع فازی تطبیقی مبتنی بر رویداد برای یک کلاس از سامانه‌های چندکارگزار غیرخطی مرتبه کسری در [۲۸] مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مقاله، دو مکانیسم راه‌اندازی رویداد جدید به ترتیب برای ارتباط و کنترل طراحی شده و تجزیه و تحلیل پایداری بر اساس روش مستقیم لیاپانوف مرتبه کسری صورت گرفته است. کنترل آرایش زمان مقطوع سامانه‌های چند کارگزار در ربات‌هایی که محدودیت‌های تأخیر دارند، در [۲۹] مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مقاله چند روش زمان مقطوع غیرخطی برای سامانه‌هایی که دارای چند ربات هستند، ارائه شده و زمان نشست مربوطه با استفاده از توابع لیاپانوف به دست آمده است. در [۳۰]، همگرایی کارگزاران در سامانه‌های چندکارگزار مرتبه کسری با یک آرایش مشخص در یک زمان ثابت بررسی شده است. قانون کنترلی معرفی شده در این مقاله، مرتبه صحیح بوده و مشکل چترینگ در سیگنال کنترلی وجود دارد. با این حال در مقاله حاضر با طراحی پروتکل کنترل به صورت مرتبه کسری، این مسئله حل شده است. در این مقاله فرض گردیده که هر یک از کارگزاران دارای دینامیک تک‌انتگرال‌گیر مرتبه کسری هستند. مسئله اجماع در مورد این دسته از سامانه‌ها بررسی شده و پروتکلی توزیع‌یافته جهت رسیدن به اجماع ارائه می‌گردد. نوآوری‌های این پژوهش را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

- ارائه یک پروتکل اجماع توزیع‌یافته مرتبه کسری جدید جهت رسیدن به اجماع با نرخ همگرایی زمان ثابت برای سیستم‌های چندکارگزار مرتبه کسری
- مشخص نمودن حد بالا برای زمان نشست حصول اجماع مستقل از شرایط اولیه کارگزاران
- حل مشکل چترینگ ناشی از وجود توابع ناپیوسته در پروتکل کنترلی با استفاده از ویژگی انتگرال‌گیر مرتبه کسری در نقش فیلتر پایین‌گذر

ساختار این مقاله شامل ۵ بخش است. در بخش دوم، مقدمات ریاضی شامل تعاریف، لم‌ها و قضایای لازم بیان شده و در بخش سوم پروتکل کنترل پیشنهادی به همراه اثبات آن ارائه گردیده است. در بخش چهارم شبیه‌سازی و مقایسه انجام شده و نهایتاً در بخش آخر، نتیجه‌گیری مقاله آمده است.

۲- تعاریف اولیه، لم‌ها و قضایا

در سامانه‌های چندکارگزار، وجود ارتباط و هماهنگی و تبادل اطلاعات بین اعضای گروه اهمیت دارد و منجر به انعطاف‌پذیری و هماهنگی گروه جهت رسیدن به اهداف مورد نظر می‌گردد. این ارتباطات و تبادل اطلاعات با استفاده از گراف مدل‌سازی می‌شود. هر کارگزار معادل یک گره از گراف و ارتباط بین کارگزاران و تبادل داده بین آنها توسط یال‌های گراف مدل می‌شود [۱۷].

سامانه چندکارگزار توسط گراف جهت‌دار g با مجموعه رأس‌های $V(g) = \{v_i, i \in I_n\}$ مدل می‌شود. راس v_i معادل کارگزار i ام و یال (v_i, v_j) بیان‌کننده وجود راه ارتباطی از کارگزار i ام به کارگزار j ام است. اگر فرض گردد که گراف g دارای خودحلقه نباشد (یعنی گراف، یالی به صورت (v_i, v_j) نداشته باشد)، مجموعه همسایگان کارگزار i ام، کارگزارانی می‌باشند که قادر هستند تا اطلاعات کارگزار i ام را دریافت نمایند و با N_i نمایش داده می‌شوند و تعریف ریاضی آنها معادل $N_i = \{j : (v_i, v_j) \in E, i \neq j\}$ است.

تعریف ۱ (ماتریس مجاورت) [۱۷]: کمیت‌های وزنی یک گراف با

رهبر- پیرو [۱۳] طبقه‌بندی می‌شود. در سامانه‌های دارای رهبر، رهبر مسیر حرکت کل گروه را تعیین می‌نماید و سایر کارگزاران باید با خطای مناسبی رهبر را تعقیب کنند. در سامانه‌های بدون رهبر، خود کارگزاران با توجه به اطلاعاتی که از همسایگان خود می‌گیرند، مسیر حرکت را مشخص کرده و ادامه می‌دهند. بیشتر نتایج موجود در مورد مسئله اجماع سامانه‌های چندکارگزار، در مورد کارگزارانی با دینامیک مرتبه صحیح ارائه شده است؛ مانند دینامیک مرتبه اول (تک‌انتگرال‌گیر) [۱۴]، دینامیک مرتبه دوم (دو‌انتگرال‌گیر) [۱۵] و دینامیک‌های مراتب بالاتر [۱۶].

یکی از مسائل مربوط به سامانه‌های چندکارگزار، زمان محدودبودن رسیدن به اجماع کارگزاران است؛ به این معنی که در این سامانه‌ها، کارگزاران در یک زمان محدود همگرا شوند. در بسیاری از کاربردهای عملی، سامانه‌هایی که در زمان محدود به اجماع می‌رسند از مزایای دقت کنترلی بالاتر، کاهش اغتشاش و مقاوم‌بودن در برابر عدم قطعیت‌ها برخوردار هستند. در [۱۷] مسأله اجماع برای سامانه‌های خطی مرتبه اول با تعداد اعضای بالا بیان شده که اجماع در زمان محدود را بررسی می‌کند. مسأله زمان محدود برای سامانه‌های خطی مرتبه دوم در [۱۸] ارائه گردیده که در این مقاله برای دو حالت وجود و یا عدم وجود اغتشاش خارجی، ورودی کنترلی ارائه شده است. همچنین رسیدن به اجماع در زمان محدود برای سامانه‌های مرتبه دو با دینامیک غیرخطی و در حضور اغتشاش خارجی نیز در [۱۹] مطرح گردیده که با استفاده از روش مود لغزشی، کارگزاران در زمان محدود به اجماع می‌رسند. مسئله اجماع در سامانه‌های چندکارگزار مرتبه کسری در [۲۰] مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله با استفاده از قضیه لیاپانوف، ماتریس بهره کنترل برای دستیابی به اجماع پیروی از رهبر به ترتیب در توپولوژی‌های ثابت و سوئیچینگ طراحی شده است. کاربرد روش کنترل مود لغزشی برای حل مسئله اجماع در سامانه‌های چندکارگزار مرتبه کسری در [۲۱] بررسی شده است. در این مقاله اثبات گردیده که اگر شبکه ارتباطی دارای یک درخت پوشای جهت‌دار باشد، می‌توان به اجماع زمان محدود نامی رسید. در [۲۲] برای اولین بار تعریف اجماع رهبر- پیرو زمان محدود ارائه شده که در سامانه‌های چندکارگزار مرتبه کسری مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله بیان گردیده که سامانه در زمان محدودی همگرا می‌شود ولی به مقدار زمان آن اشاره نشده است.

در پروتکل‌های اجماع زمان محدود می‌توان زمان نشست را محاسبه نمود که این زمان علی‌رغم محدودبودن به شرایط اولیه کارگزاران بستگی دارد. بنابراین عدم دسترسی به این شرایط اولیه معمولاً مانع از تخمین زمان نشست می‌شود، زیرا در بسیاری از کاربردهای عملی به دست آوردن اطلاعات دقیق از شرایط اولیه کار سختی است که تخمین زمان همگرایی را دشوار می‌کند. علاوه بر این، اگر شرایط اولیه تمایل به بی‌نهایت داشته باشد، زمان همگرایی بی‌نهایت خواهد شد. اخیراً یک رویکرد جدید به نام همگرایی زمان ثابت پیشنهاد شده است که تضمین می‌کند زمان نشست بدون توجه به شرایط اولیه دارای محدودیت باشد [۲۳] و [۲۴]. در [۲۵] مطالعه بر روی طراحی اجماع زمان ثابت برای سامانه‌های چندکارگزار مرتبه اول با دینامیک غیرخطی ناشناخته انجام شده است. در [۲۶] مسئله اجماع رهبر- پیرو در زمان ثابت در سامانه‌های چندکارگزار مرتبه بالا مبنی بر اغتشاشات خارجی بررسی گردیده است. مسئله اجماع زمان ثابت توزیع‌شده برای سامانه‌های چندکارگزار غیر خطی رهبر- پیرو ناهمگن در [۲۷] بررسی شده است. سامانه‌های چندکارگزار در نظر گرفته شده شامل

اگر پایدار زمان محدود سراسری باشد و تابع زمان نشست آن $T(x)$ ، توسط مقدار مثبت $T_{\max} > 0$ محدود باشد، یعنی $T(x) < T_{\max}$ برای $\forall x \in R^N$ برقرار باشد.

لم ۱ [۳۴]: معادله دیفرانسیل (۶) را در نظر بگیرید

$$\dot{r} = -\alpha' r^{\frac{m'}{n'}} - \beta' r^{\frac{p'}{q'}} \quad (6)$$

$$r(0) = r$$

که در آن $\alpha', \beta' > 0$ و $m', n', p', q' > 0$ اعداد صحیح مثبت هستند به طوری که $m' < n'$ و $p' < q'$ برقرار باشد. حال نقطه تعادل سیستم فوق پایدار زمان ثابت است و این زمان نشست طبق (۷) توسط حد بالا محدود می‌شود

$$T \leq \frac{1}{\alpha' m' - n'} + \frac{1}{\beta' q' - p'} \quad (7)$$

تعریف ۷ [۳۵]: در حساب مرتبه کسری، عملگرهای انتگرال گیر و مشتق گیر با یک عملگر اساسی به صورت D^ρ نمایش داده می‌شوند. تابع مشتق و انتگرال مرتبه کسری ریمان-لیوویل^۵ به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود

$$D^\rho f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\rho)} \int_a^t (t-\tau)^{-\rho-1} f(\tau) d(\tau), & \rho < 0 \\ f(t), & \rho = 0 \\ D^n [{}_a D_t^{\rho-n} f(t)], & \rho > 0 \end{cases} \quad (8)$$

که به ازای مقادیر مثبت ρ ، این عملگر نشان‌دهنده مشتق گیر و به ازای مقادیر منفی، نشان‌دهنده انتگرال گیر است.

لم ۲ [۳۶]: اگر $P \in R^{N \times N}$ ماتریس مثبت معین، مقارن و ثابت باشد و x تابعی باشد که مشتق کاپوتو برای آن وجود داشته باشد، آن گاه (۹) برقرار است

$$D^\rho (x^T(t) P x(t)) \leq x^T(t) P D^\rho x(t), \quad t \in [0, T] \quad (9)$$

لم ۳ [۳۷]: فرض کنید $x \in R^N$ و $D = d_{ij} \in R^{N \times N}$ مقارن هستند. اگر $f: R \rightarrow R$ تابع فرد باشد، آن گاه (۱۰) برقرار است

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_{ij} x_i f(x_i - x_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_{ij} (x_i - x_j) f(x_i - x_j) \end{aligned} \quad (10)$$

لم ۴ [۳۸]: برای همه اعداد غیرمنفی عبارات زیر برقرار هستند:

$$\begin{aligned} ۱) & \text{ if } 0 < k < 1 \rightarrow \sum_{i=1}^N y_i^k \geq \left(\sum_{i=1}^N y_i \right)^k \\ ۲) & \text{ if } 0 < k < 1 \rightarrow \sum_{i=1}^N y_i^k \geq N^{1-k} \left(\sum_{i=1}^N y_i \right)^k \end{aligned}$$

لم ۵ [۱۲]: اگر L_A ماتریس لاپلاسیان باشد، عبارات زیر برقرار هستند:

$$\begin{aligned} ۱) & x^T L_A x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_{ij} (x_j - x_i)^2 \\ ۲) & \lambda_{\min}(L_A) = \min_{x \neq 0, \sum_{i=1}^N x_i = 0} \frac{x^T L_A x}{x^T x} \end{aligned}$$

استفاده از ماتریس مجاورت بیان می‌شوند که ماتریسی مربعی است و با علامت A نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$A = [a_{ij}] = \begin{cases} a_{ij}, & (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

تعریف ۲ (ماتریس لاپلاسیان) [۱۷]: ماتریس لاپلاسیان^۱ با علامت L نشان داده شده و به صورت $L = D - A$ تعریف می‌گردد که D معادل ماتریس قطری درجه‌های ورودی گره‌های آن است. از ماتریس لاپلاسیان برای توصیف یک گراف و همچنین تبادل اطلاعات در یک شبکه ارتباطی سامانه‌های چندکارگزار استفاده می‌شود. کارگزاران در سامانه‌های چندکارگزار توسط مدل‌های ریاضی مختلف بیان می‌شوند [۳۱]. یکی از ساده‌ترین مدل‌ها در سامانه‌های چندکارگزار، مدل تک‌انتگرال‌گیر است به صورت زیر

$$\dot{x} = u_i, \quad i \in N \quad (2)$$

که در آن N مجموعه تمامی کارگزاران، u_i بردار ورودی کنترلی کارگزار i ام و \dot{x} تغییر مکان یعنی سرعت کارگزار i ام است. مدل دیگر مدل انتگرال‌گیر دوگانه با نام مدل جرم نقطه نیز شناخته می‌شود. همچنین مدل‌های دیگری از جمله مدل تک‌چرخ غیرهولونومیک^۲ برای کاربرد در کنترل چند ربات متحرک و مدل دویین^۴ که حالت ساده‌شده مدل تک چرخ غیرهولونومیک است، ارائه شده‌اند.

تعریف ۳ (تابع گاما) [۳۲]: تابع گاما برای $q \in R^+$ به صورت (۳) تعریف می‌گردد

$$\Gamma(q) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N! N^q}{q(q+1)(q+2)\dots(q+N)} \quad (3)$$

تعریف ۴ (اجماع) [۱۱]: اجماع در سامانه‌های چندکارگزار با پویش (۲) به این معناست که حالت تمامی کارگزاران به مقدار مشترکی برسند و یا به ازای هر مقدار اولیه‌ای، (۴) برقرار باشد

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

در این حالت ورودی کنترلی هر کارگزار طبق (۵) به دست می‌آید

$$u_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j - x_i) \quad (5)$$

که در آن a_{ij} کمیت وزنی مربوط به یال‌های گراف در ماتریس مجاورت است. این قانون کنترلی برای هر کارگزار، تنها به حالت همسایگان آن کارگزار بستگی دارد و تحت شرایط خاصی، اجماع تمامی کارگزاران را تضمین می‌نماید.

تعریف ۵ (زمان محدود) [۳۳]: سیستمی را به فرم $\dot{x} = f(x)$ و $f(0) = 0, x \in R^N$ در نظر بگیرید. اگر یک تابع پیوسته مثبت معین $V(x): U \rightarrow R$ با مقادیر حقیقی $\sigma \in (0, 1)$ و $\delta > 0$ با همسایگی $U \subset U$ وجود داشته باشد که $\dot{V}(x) \leq -\delta(V(x))^\sigma, x \in U - \{0\}$ ، سپس $V(x)$ در زمان محدود به صفر میل می‌کند. همچنین زمان محدود آن به صورت $T \leq V(x(0))^{1-\sigma} / (\delta(1-\sigma))$ است.

تعریف ۶ (زمان ثابت) [۲۳]: برای $x \in R^N$ ، سیستم $\dot{x} = f(t, x)$ و $f(t, 0) = 0$ را در نظر بگیرید. این سیستم زمان ثابت سراسری است

1. Laplacian Matrix
2. Single Integrator Model
3. Non-Holonomic Unicycle
4. Dubins Model

۳- نتایج اصلی

دینامیک هر کارگزار را در سامانه چندکارگزار مرتبه کسری به صورت (۱۱) در نظر بگیرید

$$D^\rho x_i(t) = u_i(t), \quad i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (11)$$

که در آن $D^\rho x_i$ مشتق ریمن-لیوویل، x_i حالت کارگزار i ام و u_i ورودی کنترل کارگزار i ام است. یک نمونه عملی از سیستم (۲) مدل ساده‌شده بازوی مکانیکی با مفصل انعطاف‌پذیر تک‌رابط است [۳۹]. فرض کنید سیستم مورد بررسی دارای توپولوژی ثابت است تا ماتریس لاپلاسی آن پیوسته باشد. همچنین گراف آن شامل یک درخت پوشاست. فرم کلی قانون کنترل برای رسیدن کارگزاران به اجماع در زمان ثابت به صورت (۱۲) است

$$u_i = D^{-r} \left[\alpha \sum_{j=1}^N a_{ij} \text{sig}(x_j - x_i)^m + \beta \sum_{j=1}^N a_{ij} \text{sig}(x_j - x_i)^q \right] \quad (12)$$

که $\text{sig}(x)^\alpha = |x|^\alpha \text{sign}(x)$ همچنین $\alpha, \beta > 0$ و m, n, p, q اعداد صحیح مثبت فرد هستند؛ به طوری که $p < q$ و $n < m$ برقرار باشد. با توجه به این که r مرتبه انتگرالی است با علامت منفی نشان داده شده که به صورت $0 < r \leq 1$ تعریف می‌شود.

قضیه ۱: با توجه به دینامیک (۱۱) برای هر کارگزار در سامانه‌های چندکارگزار مرتبه کسری، اگر گراف سیستم به صورت متصل و شامل یک درخت پوشا باشد، اعمال قانون کنترل ارائه‌شده در (۱۲) به ازای $r = 1 - \rho$ ، موجب می‌شود تا کارگزاران طبق زمان ثابت رابطه زیر به اجماع برسند

$$T \leq \frac{1}{\alpha N^{\frac{n-m}{\nu n}} [\nu \lambda_\nu(L_B)]^{\frac{1+m}{\nu}} m - n} - \frac{1}{\beta [\nu \lambda_\nu(L_C)]^{\frac{1+p}{\nu}} q - p} \quad (13)$$

در (۱۳) باید نابرابری‌های $n < m$ و $p < q$ برقرار باشند که L_B ماتریس لاپلاسین مربوط به ماتریس مجاورت $B = [a_{ij}^{\frac{\nu n}{n+m}}]$ و به طور مشابه، L_C ماتریس لاپلاسین مربوط به ماتریس مجاورت $C = [a_{ij}^{\frac{\nu q}{q+p}}]$ است. توجه شود که ماتریس مجاورت اصلی برابر $A = [a_{ij}]$ می‌باشد

$$T \leq \frac{1}{\alpha N^{\frac{n-m}{\nu n}} [\nu \lambda_\nu(L_B)]^{\frac{1+m}{\nu}} m - n} - \frac{1}{\beta [\nu \lambda_\nu(L_C)]^{\frac{1+p}{\nu}} q - p} \quad (14)$$

اثبات: اگر تابع لیاپانوف به فرم $V(t, x(t)) = x(t)^T x(t)$ فرض شود که $x \in R^N$ و $V \geq 0$ باشد، می‌توان از لم ۲ جهت محاسبه مشتق تابع لیاپانوف به صورت زیر بهره گرفت. از لم ۲ و (۱۱) و (۱۲)، (۱۵) حاصل می‌شود. با توجه به فرض قضیه اگر $r = 1 - \rho$ باشد، آن گاه داریم

$$\dot{V} \leq \nu \alpha \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} x_i \text{sig}(x_j - x_i)^m + \nu \beta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} x_i \text{sig}(x_j - x_i)^q \quad (16)$$

طبق لم ۳، عبارت فوق به صورت زیر خواهد بود

$$\dot{V} \leq \alpha \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_i - x_j) \text{sig}(x_j - x_i)^m + \beta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_i - x_j) \text{sig}(x_j - x_i)^q \quad (17)$$

با توجه به آن که $\text{sig}(\cdot)^{m/n}$ و $\text{sig}(\cdot)^{p/q}$ فرد هستند، (۱۸) نتیجه می‌شود. از آنجایی که $n < m$ و $p < q$ است، پس $1 + \frac{m}{\nu} > 1 + \frac{p}{\nu}$ و $1 + \frac{q}{\nu} < 1 + \frac{m}{\nu}$ حاصل می‌شود. حال با توجه به لم ۴، (۱۹) و همچنین طبق لم ۵، (۲۰) به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \dot{V} &= D^{1-\rho} D^\rho V = D^{1-\rho} D^\rho x(t)^T x(t) \leq D^{1-\rho} \left[\nu \sum_{i=1}^N x_i D^\rho x_i \right] = D^{1-\rho} \left[\nu \sum_{i=1}^N x_i u_i \right] \\ &= D^{1-\rho} \left[\nu \sum_{i=1}^N x_i D^{-r} \left[\alpha \sum_{j=1}^N a_{ij} \text{sig}(x_j - x_i)^m + \beta \sum_{j=1}^N a_{ij} \text{sig}(x_j - x_i)^q \right] \right] \\ &= D^{1-\rho} D^{-r} \left[\nu \sum_{i=1}^N x_i \left[\alpha \sum_{j=1}^N a_{ij} \text{sig}(x_j - x_i)^m + \beta \sum_{j=1}^N a_{ij} \text{sig}(x_j - x_i)^q \right] \right] \\ &= D^{1-\rho} D^{-r} \left[\nu \alpha \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} x_i \text{sig}(x_j - x_i)^m + \nu \beta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} x_i \text{sig}(x_j - x_i)^q \right] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\alpha \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} |x_j - x_i| |x_j - x_i|^{\frac{m}{n}} - \beta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} |x_j - x_i| |x_j - x_i|^{\frac{q}{n}} = -\alpha \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} |x_j - x_i|^{1+\frac{m}{n}} - \beta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} |x_j - x_i|^{1+\frac{q}{n}} \\ &= \alpha \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [a_{ij}^{\frac{\nu n}{n+m}} |x_j - x_i|^\nu]^{\frac{1+m}{\nu}} - \beta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [a_{ij}^{\frac{\nu q}{q+p}} |x_j - x_i|^\nu]^{\frac{1+q}{\nu}} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\alpha N^{\frac{n-m}{\nu n}} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}^{\frac{\nu n}{n+m}} |x_j - x_i|^\nu \right]^{\frac{1+m}{\nu}} - \beta \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}^{\frac{\nu q}{q+p}} |x_j - x_i|^\nu \right]^{\frac{1+q}{\nu}} \\ &= -\alpha N^{\frac{n-m}{\nu n}} \left[\frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}^{\frac{\nu n}{n+m}} |x_j - x_i|^\nu}{V} \right]^{\frac{1+m}{\nu}} - \beta \left[\frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}^{\frac{\nu q}{q+p}} |x_j - x_i|^\nu}{V} \right]^{\frac{1+q}{\nu}} \end{aligned} \quad (19)$$

کنترلی (۱۲) ممکن می‌شود.

نکته ۳: شایان ذکر است که در قضیه ۱، گراف ارتباطی به صورت متصل برای سیستم چندکارگزار بدون رهبر در نظر گرفته شده است. با این فرضیات، ماتریس لاپلاسین مربوط، دارای مقدار ویژه صفر خواهد بود. وجود مقدار ویژه صفر باعث بروز مشکلات نظری در اثبات قضایای اجماع با رویکرد تابع لیاپانوف می‌شود. مثبت معین نبودن تابع لیاپانوف شامل ماتریس لاپلاسین و نیز معکوس ناپذیری ماتریس لاپلاسین از جمله مواردی است که در تحلیل پایداری سیستم‌های چندکارگزار بدون رهبر بروز می‌کند. با این حال در این مقاله تابع لیاپانوف به صورت عبارت $V(t, x(t)) = x(t)^T x(t)$ در نظر گرفته شده و در روند اثبات، وجود مقدار ویژه صفر در ماتریس لاپلاسین مشکلی به وجود نیاورده است.

۴- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش یک مثال جامع برای نشان دادن کارایی و کاربرد پروتکل پیشنهادی و همچنین تجزیه و تحلیل تئوری ارائه گردیده است. یک سامانه با ۵ کارگزار را در نظر بگیرید که ماتریس مجاورت آنها به صورت زیر باشد

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۲۳)$$

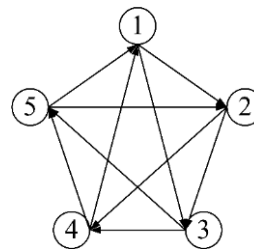
توپولوژی ارتباطی بین آنها در شکل ۱ نشان داده شده که شرایط اولیه کارگزاران به فرم $x_{1r} = (-2, -2)$ ، $x_{2r} = (0.5, -3)$ ، $x_{3r} = (1, -1.5)$ ، $x_{4r} = (-2.5, 3)$ و $x_{5r} = (2.5, 0.5)$ فرض گردیده است. در اینجا ضرایب به صورت $\alpha = \beta = 1$ ، $m = 7$ ، $n = 5$ ، $p = 7$ و $q = 9$ در نظر گرفته شده و مرتبه کسری ۰.۹ است. همچنین با توجه به $1 - \rho = r$ ، مقدار $r = 0.1$ می‌باشد و طبق (۱۳)، حد بالایی زمان نشست $T = 7.8635$ ثانیه محاسبه شده است. شکل ۲ خطای حاصل از اجماع کارگزاران را نشان می‌دهد که طبق آن کارگزاران به خوبی قبل از زمان نشست به دست آمده، به اجماع رسیده‌اند. همچنین در شکل ۳، همگرایی آنها مشاهده می‌شود. در شکل ۴ قانون کنترلی نیز نشان داده شده است. در این قسمت مقادیر مختلف برای دو مرتبه کسری ρ و r بررسی شده‌اند. طبق رابطه‌ای که این دو با هم دارند یعنی $1 - \rho = r$ ، سه حالت برای مقدار آنها به صورت (۲۴) در نظر گرفته شده است

$$\begin{aligned} \rho = 0.9, \quad r = 0.1 \\ \rho = 0.5, \quad r = 0.5 \\ \rho = 0.1, \quad r = 0.9 \end{aligned} \quad (۲۴)$$

و در شکل ۵ خطای ناشی از اجماع کارگزاران آمده و بزرگ‌نمایی هم شده است. طبق این شکل برای هر سه حالت، خطا با نزدیکی خوبی به صفر می‌باشد که نشان می‌دهد عملکرد سیستم تقریباً یکسان بوده و تفاوت چندانی با هم ندارند.

نهایتاً پروتکل کنترلی ارائه شده با زمان محدود مقایسه گردیده است. با قراردادن $\alpha = 0$ در (۱۲)، سیستم به صورت زمان محدود می‌شود [۳۴].

طبق تعریف ۵ در نظر گرفتن $\delta = \frac{\beta}{c} [c^2 \lambda_q(L_C)]^{\frac{1+p}{2}}$ و $\sigma = \frac{p+q}{2q}$ مقدار حد بالایی برای زمان محدود به صورت (۲۵) مشخص می‌شود



شکل ۱: ارتباط کارگزاران.

$$\left\{ \begin{aligned} \text{if } B = [a_{ij}^{\frac{r_n}{n+m}}] &\rightarrow \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}^{\frac{r_n}{n+m}} |x_j - x_i|^r}{V} \\ &= \frac{r x^T L_B x}{x^T x} \geq r \lambda_q(L_B) \\ \text{if } C = [a_{ij}^{\frac{r_q}{q+p}}] &\rightarrow \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}^{\frac{r_q}{q+p}} |x_j - x_i|^r}{V} \\ &= \frac{r x^T L_C x}{x^T x} \geq r \lambda_q(L_C) \end{aligned} \right. \quad (۲۰)$$

بنابراین جایگذاری (۲۰) در (۱۹)، نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq -\alpha N^{\frac{n-m}{2n}} [r \lambda_q(L_B) V]^{\frac{1+m}{2}} - \beta [r \lambda_q(L_C) V]^{\frac{1+p}{2}} = \\ -\alpha N^{\frac{n-m}{2n}} [r \lambda_q(L_B)]^{\frac{1+m}{2}} V^{\frac{1+m}{2}} - \beta [r \lambda_q(L_C)]^{\frac{1+p}{2}} V^{\frac{1+p}{2}} \end{aligned} \quad (۲۱)$$

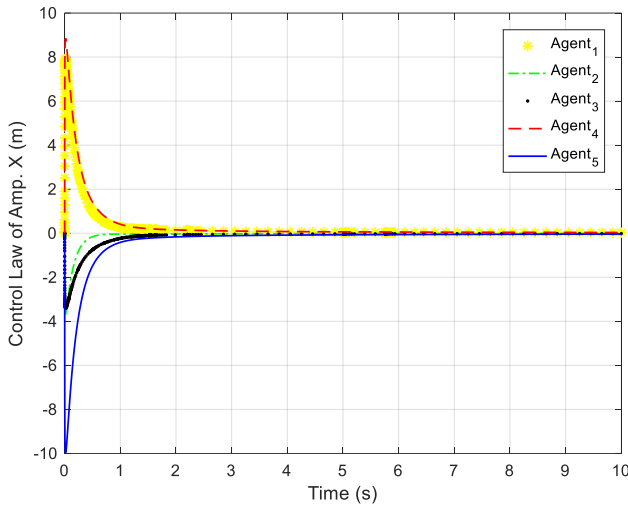
بر اساس لم ۱ داریم

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha' &= \alpha N^{\frac{n-m}{2n}} [r \lambda_q(L_B)]^{\frac{1+m}{2}} \\ \beta' &= \beta [r \lambda_q(L_C)]^{\frac{1+p}{2}} \\ m' &= m + n \\ n' &= 2n \\ p' &= p + q \\ q' &= 2q \end{aligned} \right. \quad (۲۲)$$

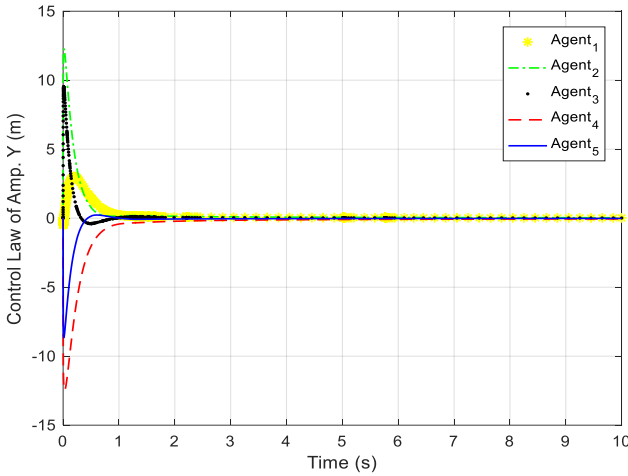
پس (۱۳) به دست می‌آید و قضیه کامل می‌شود. ■

نکته ۱: توجه شود که پروتکل کنترل پیشنهادی، یک روش کنترل کاملاً توزیع‌یافته است و هر کارگزار از اطلاعات محلی کارگزاران همسایه خود استفاده می‌کند. همچنین با توجه به معلوم بودن مدل کارگزاران و در نتیجه مرتبه کسری دینامیک کارگزار (ρ) در (۱۱)، فرض $r = 1 - \rho$ در مورد مرتبه کسری انتگرال‌گیر در پروتکل کنترلی (۱۲) موجب محدودیتی نمی‌شود.

نکته ۲: تابع sig در قانون کنترلی (۱۲) یک تابع ناپیوسته است و برای پیاده‌سازی نیاز به فرکانس سوئیچینگ بی‌نهایت دارد و معمولاً در هنگام پیاده‌سازی عملی برای جلوگیری از پدیده وزوز، یک روش متداول استفاده از تابع اشباع پیوسته به جای تابع sig است. با وجود این در این مقاله، قانون کنترلی (۱۲) شامل انتگرال مرتبه کسری از مرتبه $(D^{-r})r$ است که در واقع در نقش یک فیلتر پایین‌گذر بر روی تابع sig عمل می‌کند و محتوای فرکانس بالا را از خود عبور نمی‌دهد. به این ترتیب بدون نیاز به جایگزینی تابع sig با یک تابع اشباع پیوسته، تحقق سیگنال

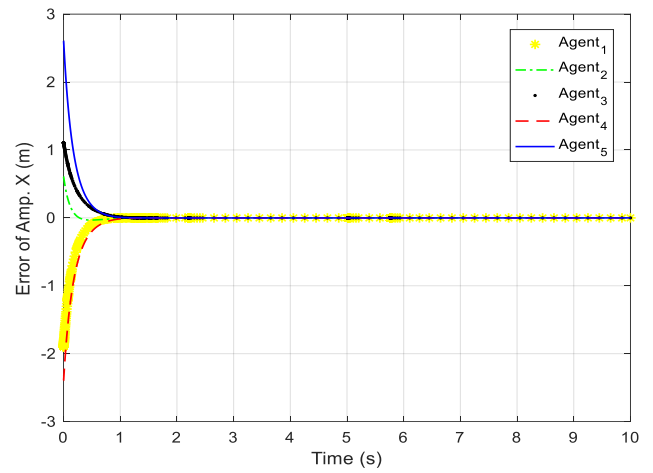


(الف)

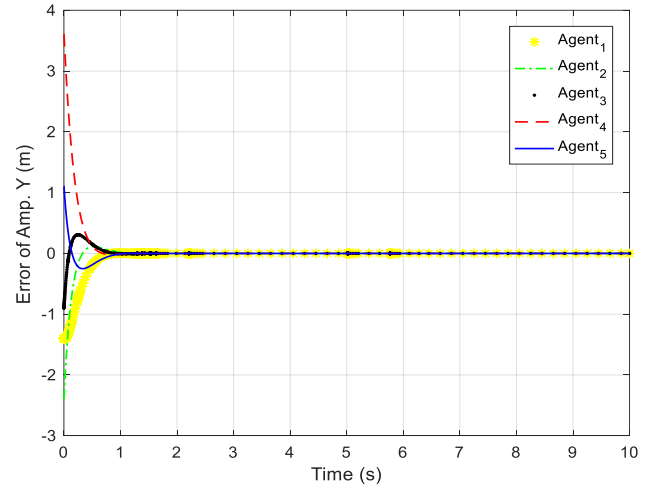


(ب)

شکل ۴: قانون کنترل حاصل از اجماع کارگزاران با مرتبه کسری ۰٫۹، (الف) طول کارگزاران و (ب) عرض کارگزاران.



(الف)



(ب)

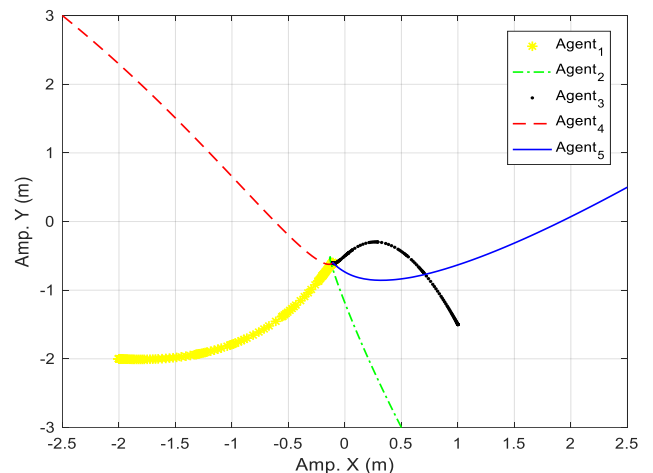
شکل ۵: خطای حاصل از اجماع کارگزاران با مرتبه کسری ۰٫۹، (الف) طول کارگزاران و (ب) عرض کارگزاران.

شکل ۷ آمده که زمان نشست به مقدار $T \leq ۶٫۰۲۷۰$ برای طول و مقدار $T \leq ۳٫۶۱۳۱$ برای عرض کارگزاران محدود گردیده است. اکنون اگر شرایط اولیه ۱۰ برابر شود، به این معنی که به صورت $x_1 = (-۲۰, -۲۰)$ ، $x_2 = (۵, -۳۰)$ ، $x_3 = (۱۰, -۱۵)$ ، $x_4 = (-۲۵, ۳۰)$ و $x_5 = (۲۵, ۵)$ تغییر کند، خطا در این حالت در شکل ۸ نشان داده شده است. همچنین خطای ناشی از اجماع کارگزاران در الگوریتم زمان ثابت با این شرایط اولیه جدید در شکل ۸ نشان داده شده است.

طبق شکل‌های ۶ و ۷، وقتی شرایط اولیه کارگزاران تغییر کند، زمان رسیدن آنها به اجماع یعنی زمان نشست تغییر می‌کند. هرچه فاصله کارگزاران در ابتدا بیشتر باشد، این زمان بیشتر است؛ اما با توجه به شکل‌های ۲ و ۸ در الگوریتم زمان ثابت این مسئله مشاهده نمی‌شود و این یک مزیت بزرگ برای این الگوریتم به حساب می‌آید.

۵- نتیجه‌گیری

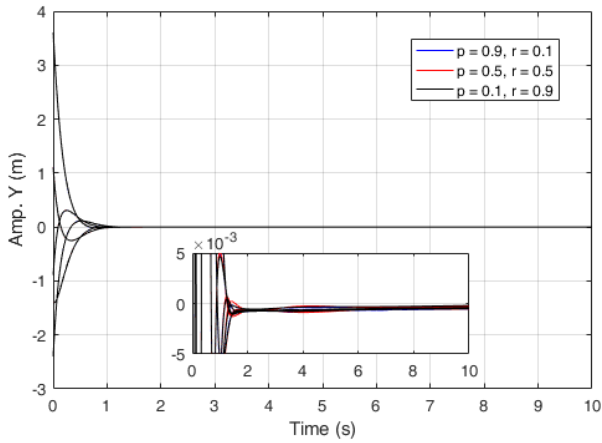
در این مقاله یک الگوریتم اجماع برای سامانه‌های چندکارگزار دارای دینامیک تک‌انتگرال‌گیر مرتبه کسری ارائه گردید و نشان داده شد که کارگزاران در یک زمان مشخص به اجماع می‌رسند. با معرفی یک تابع لیپانوف اثبات گردید که کارگزاران طی یک زمان نشست مشخص با حد بالای معلوم و کران‌دار همگرا می‌شوند. همچنین نشان داده شد که این



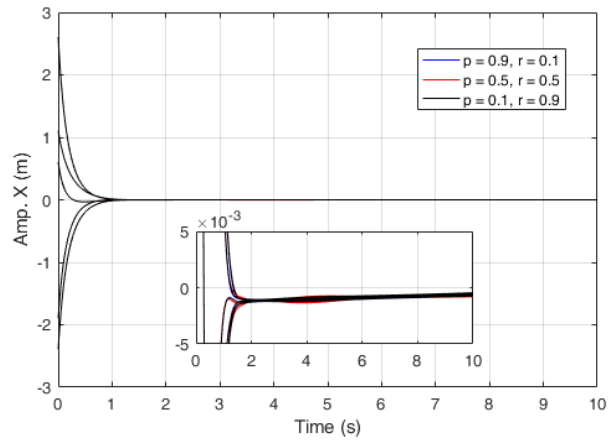
شکل ۶: همگرایی کارگزاران با مرتبه کسری ۰٫۹.

$$T \leq \frac{V(x(0))}{\frac{\tau q - 2\rho q - p}{\tau q}} \frac{\beta}{c} [e^{\tau \lambda_{\tau}(L_C)}]^{-\frac{1+p}{\tau}} \frac{\tau q - 2\rho q - p}{\tau q} \quad (۲۵)$$

شکل ۶ خطای ناشی از اجماع کارگزاران در الگوریتم زمان محدود را با همان مقدارهای پارامترها نشان می‌دهد که زمان نشست به مقدار

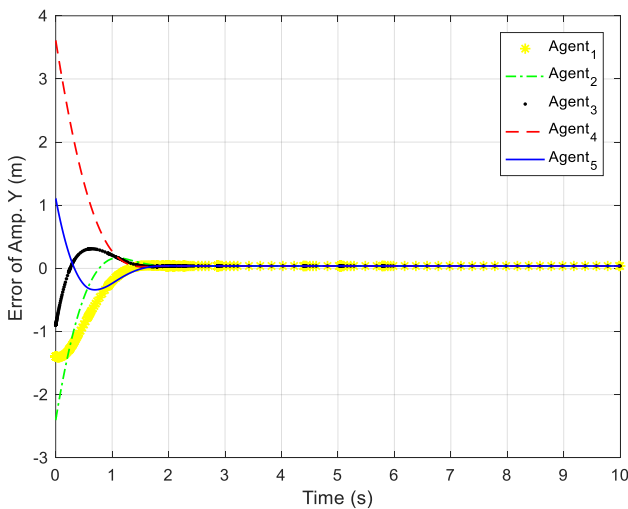


(ب)

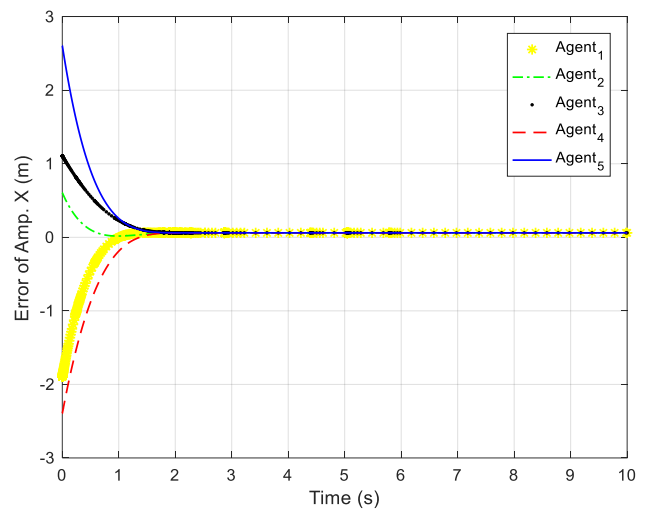


(الف)

شکل ۵: خطای حاصل از اجماع کارگزاران با مرتبه کسری مختلف به همراه بزرگنمایی، (الف) طول کارگزاران و (ب) عرض کارگزاران.

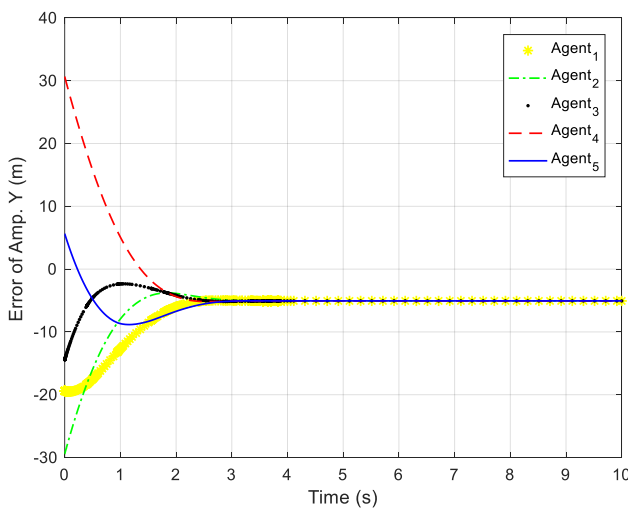


(ب)

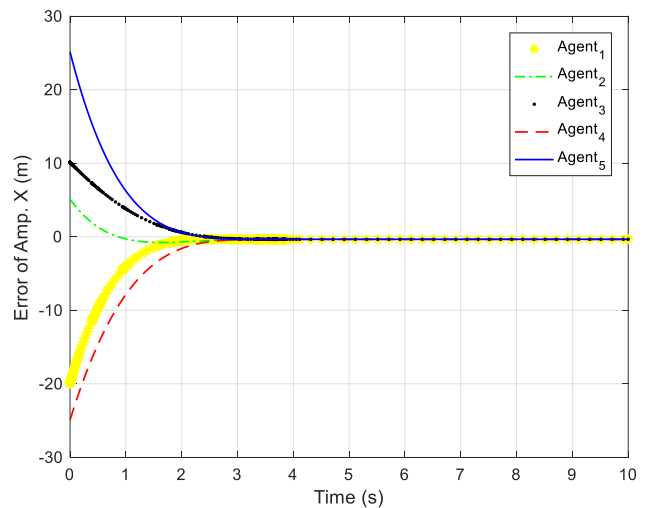


(الف)

شکل ۶: خطای ناشی از اجماع کارگزاران در زمان محدود با مرتبه کسری ۰٫۹، (الف) طول کارگزاران و (ب) عرض کارگزاران.



(ب)

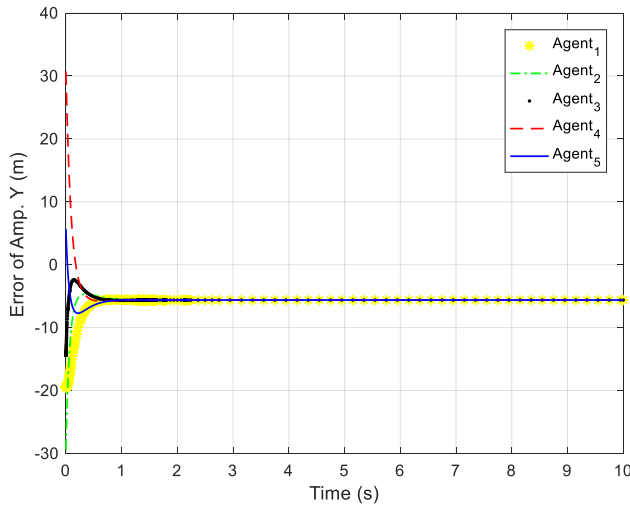


(الف)

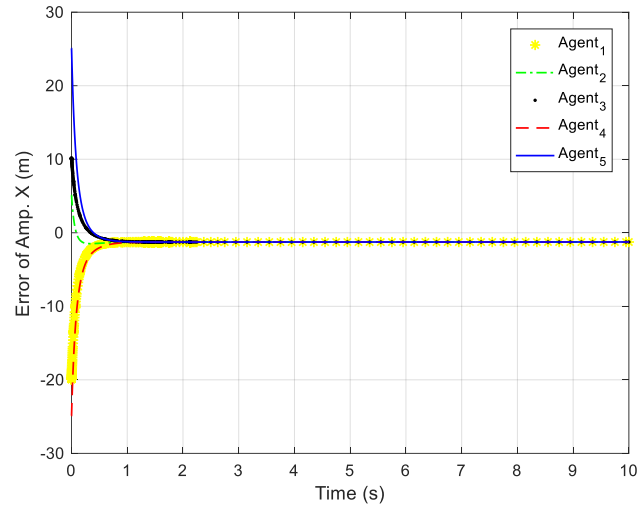
شکل ۷: خطای ناشی از اجماع کارگزاران در زمان محدود با مرتبه کسری ۰٫۹ و شرایط اولیه ۱۰ برابر، (الف) طول کارگزاران و (ب) عرض کارگزاران.

متمرکز شود. همچنین طراحی پروتکل اجماع زمان ثابت مبتنی بر روش کنترل مود لغزشی برای این سیستم‌ها می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد.

زمان نشست مستقل از شرایط اولیه کارگزاران است که مزیت عمده‌ای محسوب می‌شود و کاربرد روش ارائه‌گردیده را در موارد عملی و واقعی که در آنها شرایط اولیه کارگزاران در دسترس نیست، ممکن می‌نماید. پژوهش‌های آینده می‌تواند بر روی طراحی پروتکل اجماع زمان ثابت برای سیستم‌های چندکارگزار مرتبه کسری مرتبه دو یا مراتب بالاتر



(ب)



(الف)

شکل ۸: خطای ناشی از اجماع کارگزاران در زمان ثابت با مرتبه کسری ۰٫۹ و شرایط اولیه ۱۰ برابر، (الف) طول کارگزاران و (ب) عرض کارگزاران.

- [17] F. Xiao, L. Wang, J. Chen, and Y. Gao, "Finite-time formation control for multi-agent systems," *Automatica*, vol. 45, no. 11, pp. 2605-2611, Nov. 2009.
- [18] S. Li, H. Du, and X. Lin, "Finite-time consensus algorithm for multi-agent systems with double-integrator dynamics," *Automatica*, vol. 47, no. 8, pp. 1706-1712, Aug. 2011.
- [19] H. Li, X. Liao, and G. Chen, "Leader-following finite-time consensus in second-order multi-agent networks with nonlinear dynamics," *International J. of Control, Automation and Systems*, vol. 11, pp. 422-426, 2013.
- [20] M. Shi and S. Hu, "Leader-following consensus for a class of fractional-order nonlinear multi-agent systems under fixed and switching topologies," in *Proc. 36th Chinese Control Conf., CCC'17*, pp. 11351-11356, Dalian, China, 26-28 Jul. 2017.
- [21] H. Liu, L. Cheng, M. Tan, and Z.-G. Hou, "Exponential finite-time consensus of fractional-order multiagent systems," *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 50, no. 4, pp. 1549-1558, Apr. 2020.
- [22] H. Pan, Z. Liu, and C. Na, "Finite-time output leader-following consensus of fractional-order linear multi-agent systems," in *Proc. 38th Chinese Control Conf., CCC'19*, pp. 958-963, 27-30 Jul. 2019.
- [23] A. Polyakov, "Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 57, no. 8, pp. 2106-2110, Aug. 2012.
- [24] A. Polyakov, "Fixed-time stabilization of linear systems via sliding mode control," in *Proc. 12th Int. Workshop on Variable Structure Systems*, 6 pp., Mumbai, India, 12-14 Jan. 2012.
- [25] M. Defoort, A. Polyakov, G. Demesure, M. Djemai, and K. Veluvolu, "Leader-follower fixed-time consensus for multi-agent systems with unknown non-linear inherent dynamics," *IET Control Theory and Applications*, vol. 9, no. 4, pp. 2165-2170, Sept. 2015.
- [26] Z. Zuo, B. Tian, M. Defoort, and Z. Ding, "Fixed-time consensus tracking for multi-agent systems with high-order integrator dynamics," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 63, no. 2, pp. 563-570, Feb. 2017.
- [27] H. Du, G. Wen, D. Wu, Y. Cheng, and J. Lü, "Distributed fixed-time consensus for nonlinear heterogeneous multi-agent systems," *Automatica*, vol. 113, Article ID: 108986, Mar. 2020.
- [28] L. Wang and J. Dong, "Event-based distributed adaptive fuzzy consensus for nonlinear fractional-order multiagent systems," *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 52, no. 9, pp. 5901-5912, Sept. 2022.
- [29] C. Wang, H. Thunay, Z. Zuo, B. Lennox, and Z. Ding, H. Liu, L. Cheng, M. Tan, and Z. G. Hou, "Fixed-Time formation control of multirobot systems: design and experiments," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol. 66, pp. 6292-6301, Aug. 2019.
- [30] H. Zamani, V. J. Majd, and K. Khandani, "Formation tracking control of fractional-order multi-agent systems with fixed-time convergence," *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: J. of Systems and Control Engineering*, vol. 236, no. 9, pp. 1618-1629, Jul. 2022.
- [31] E. Semsar-Kazerooni and K. Khorasani, "Switching control of a modified leader-follower team of agents under the leader and network topological changes," *IET Control Theory and Applications*, vol. 5, no. 12, pp. 1369-1377, Aug. 2011.

مراجع

- [1] S. Westerlund, *Dead Matter Has Memory*, Kalmar, Sweden: Causal Consulting, 2002.
- [2] S. K. Samko and B. Ross, "Integration and differentiation to a variable fractional order," *Integral Transforms Special Func.*, vol. 1, no. 4, pp. 277-300, Apr. 2007.
- [3] B. Ross and S. K. Samko, "Fractional integration operator of variable order in the Holder space $Hu(x)$," *Int. J. Math. Math. Sci.*, vol. 18, no. 4, pp. 777-788, Jan. 1995.
- [4] I. Podlubny, "Fractional-order systems and $PI^{\alpha}D^{\beta}$ controllers," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 44, no. 1, pp. 208-214, Jan. 1999.
- [5] C. A. Monje, B. M. Vinagre, V. Feliu, and Y. Q. Chen, "On auto-tuning of fractional order $PI^{\alpha}D^{\beta}$ controllers," in *Proc. of Fractional Derivatives and Applications*, vol. 2, 6 pp., Porto, Portugal, 19-21 Jul. 2006.
- [6] C. Ma and Y. Hori, "Fractional order control: theory and applications in motion control," *IEEE Industrial Electronics Magazine*, vol. 1, no. 4, pp. 6-16, Winter 2007.
- [7] H. Chao, Y. Luo, L. Di, and Y. Q. Chen, "Roll-channel fractional order controller design for a small fixed-wing unmanned aerial vehicle," *Control Engineering Practice*, vol. 18, no. 7, pp. 761-772, Jul. 2010.
- [8] R. Melicio, V. M. F. Mendes, and J. P. S. Catalao, "Fractional-order control and simulation of wind energy systems with PMSG/full-power converter topology," *Energy Conversion and Management*, vol. 51, no. 6, pp. 1250-1258, Jun. 2010.
- [9] M. Zamani, M. Karimi-Ghartemani, N. Sadati, and M. Parniani, "Design of a fractional order PID controller for an AVR using particle swarm optimization," *Control Engineering Practice*, vol. 17, no. 12, pp. 1380-1387, Dec. 2009.
- [10] M. S. Tavazoei, M. Haeri, S. Jafari, S. Bolouki, and M. Siami, "Some applications of fractional calculus in suppression of chaotic oscillations," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol. 55, no. 11, pp. 4094-4101, Nov. 2008.
- [11] F. L. Lewis, H. Zhang, K. Hengster-Movric, and A. Das, *Cooperative Control of Multi-Agent Systems: Optimal and Adaptive Design Approaches*, Springer Science and Business Media, 2013.
- [12] R. Olfati-Saber and R. Murray, "Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1520-1533, Sept. 2004.
- [13] W. Ren and R. Beard, "Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 50, no. 5, pp. 655-661, May 2005.
- [14] F. Chen, Z. Chen, L. Xiang, Z. Liu, and Z. Yuan, "Reaching a consensus via pinning control," *Automatica*, vol. 45, no. 5, pp. 1215-1220, May 2009.
- [15] Z. Meng, Z. Lin, and W. Ren, "Robust cooperative tracking for multiple nonidentical second-order nonlinear systems," *Automatica*, vol. 49, no. 8, pp. 2363-2372, Aug. 2013.
- [16] S. Ferik, A. Qureshi, and F. Lewis, "Neuro-adaptive cooperative tracking control of unknown higher-order affine nonlinear systems," *Automatica*, vol. 50, no. 3, pp. 798-808, Mar. 2014.

حسین زمانی هم‌اکنون در حال تحصیل در دوره دکتری رشته مهندسی برق- کنترل در دانشگاه تربیت مدرس است. علاقه‌مندی‌های پژوهشی وی، کنترل مشارکتی سیستم‌های چندعاملی، سیستم‌های مرتبه کسری و سیستم‌های هوشمند می‌باشد.

وحید جوهری مجد در سال ۱۳۷۴ دکترای تخصصی خود را از دانشگاه پیتسبرگ آمریکا دریافت نمود. وی هم‌اکنون به عنوان دانشیار دانشگاه تربیت مدرس مشغول فعالیت است. زمینه‌های پژوهشی مورد علاقه او شناسایی و کنترل هوشمند، یادگیری عمیق، ربات‌های بلعیدنی، ربات‌های نرم، سامانه‌های چندکارگزاره یادگیر، کنترل مشارکتی، کنترل آرایش و کنترل عصبی فازی هستند.

خسرو خاندانی مدرک دکترای خود را در سال ۱۳۹۵ در رشته مهندسی برق- کنترل از دانشگاه تربیت مدرس دریافت نمود. وی هم‌اکنون به عنوان عضو هیأت علمی دانشگاه اراک فعالیت می‌کند. زمینه‌های پژوهشی مورد علاقه او سیستم‌های چندعاملی، کنترل مرتبه کسری و اتوماسیون صنعتی هستند.

- [32] K. B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, Inc. 1974.
- [33] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, "Finite-time stability of continuous autonomous systems," *SIAM J. on Control and Optimization*, vol. 38, no. 3, pp. 751-766, 2000.
- [34] N. Junkang, L. Ling, L. Chongxin, H. Xiaoyu, and L. Shilei, "Further improvement of fixed-time protocol for average consensus of multi-agent systems," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, no. 1, pp. 2523-2529, Jul. 2017.
- [35] Y. Li, Y. Q. Chen, and I. Podlubny, "Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems," *Automatica*, vol. 45, no. 8, pp. 1965-1969, Aug 2009.
- [36] M. A. Duarte-Mermoud, N. Aguila-Camacho, J. A. Gallegos, and R. Castro-Linares, "Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems," *Commun. Nonlinear Sci.*, vol. 22, no. 1-3, pp. 650-659, May. 2015.
- [37] F. L. Sun, J. C. Chen, Z. H. Guan, D. Li, and T. Li, "Leader-following finite-time consensus for multi-agent systems with jointly-reachable leader," *Nonlinear Anal.: Real World Appl.*, vol. 13, no. 5, pp. 2271-2284, Oct. 2012.
- [38] G. Hardy, J. Littlewood, and G. Polya, *Inequalities*, London: Cambridge Univ. Press, 1951.
- [39] Z. Yaghoubi, "Robust cluster consensus of general fractional-order nonlinear multi agent systems via adaptive sliding mode controller," *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 172, pp. 15-32, Jun. 2020.