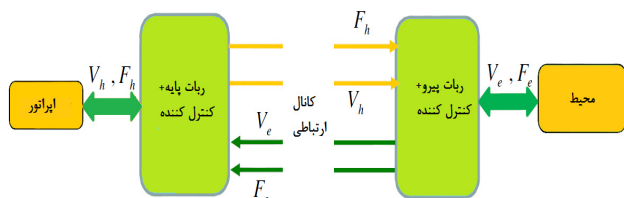


تحلیل پایداری نمایی سیستم‌های کنترل از راه دور خطی گسسته با نمونه‌برداری غیر یکنواخت

امیر امین‌زاده قوی‌فکر، امیر ریخته‌گر غیائی، محمدعلی بادامچی‌زاده و فرزاد هاشم‌زاده



شکل ۱: ساختار کلی یک سیستم کنترل از راه دور.

یافته است. این بحث، حوزه بسیار گسترده‌ای از کاربردها را شامل می‌گردد و تنها محدود به سیستم‌های رباتیک نیست. کنترل از راه دور در زمینه‌های بسیاری از کنترل ربات‌های مستقر در فضا [۲] و دست‌ور دادن به وسایل بدون سرنشین زیرآبی [۳] تا جایجایی مواد خطرناک رادیواکتیویته [۴] و مسایل مربوط به پزشکی مانند جراحی از راه دور مورد استفاده قرار گرفته است [۵].

ساختار سیستم‌های کنترل از راه دور در حالت کلی شامل اپراتور، ربات پایه، ربات پیرو، کانال ارتباطی و محیط اطراف می‌باشد [۶]. این ساختار در شکل ۱ نشان داده شده است.

اپراتور انسانی دستورات خود را به قسمت پایه داده و این دستورات از طریق یک کانال ارتباطی مانند اینترنت، شبکه‌های اختصاصی بی‌سیم یا ارتباطات ماهواره‌ای به قسمت پیرو ارسال می‌شوند.

یکی از اهداف طراحی در سیستم‌های کنترل از راه دور دادن حس حضور و رساندن درک واقعی از محیط به کاربر انسانی است که به این حالت شفافیت سیستم گفته می‌شود. در یک سیستم شفاف ایده‌آل سرعت و موقعیت ربات‌های پیرو و پایه یکدیگر را دنبال می‌کنند و نیرویی که از محیط به پیرو وارد می‌شود برابر نیرویی است که توسط دست اپراتور حس می‌شود [۷]. این ارتباط دارای یک تأخیر زمانی ثابت یا متغیر با زمان غیر قابل اجتناب است که می‌تواند شفافیت را کاهش داده و ربات را ناپایدار کند.

درباره پایداری و پسیویتی سیستم‌های کنترل از راه دور پیوسته با زمان، تحقیقات گسترده‌ای انجام گرفته و متدهای متنوعی ارائه گردیده است [۸] تا [۱۰]. با این وجود در حوزه گسسته و نمونه‌برداری شده سطح مطالعاتی اندکی وجود دارد. در ادبیات کنترلی کلاسیک (تا سال ۲۰۰۵) روش‌های به کار رفته برای بررسی پایداری و غیر فعال بودن سیستم‌های کنترل از راه دور با ساختار گسسته را می‌توان به چهار دسته کلی زیر تقسیم کرد:

- (۱) روش تغییرناپذیری پله به همراه استفاده از فیلترهای پایین‌گذر [۱۱]
 - (۲) روش تاستین به همراه استفاده از توری پراکندگی [۱۲]
 - (۳) روش هندسی غیر فعال بودن [۱۳]
 - (۴) روش غیر خطی با بررسی پایداری ورودی-حالت [۱۴]
- دو روش اول بر پایه شیوه‌های مرسوم در حوزه سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان بوده و دو روش دیگر به معرفی چهارچوب جدیدی

چکیده: کنترل از راه دور سیستم‌ها در فرایندهایی که دسترسی به نیروی کار انسانی با دشواری همراه بوده، همواره مورد توجه قرار گرفته است. در این مقاله سیستم‌های کنترل از راه دور به صورت گونه خاصی از سیستم‌های شبکه‌ای که شامل سیستم نمونه‌برداری غیر یکنواخت به همراه تأخیر می‌باشد مدل‌سازی شده و از توابع تأخیری کاهش برای نشان‌دادن معادلات سیستم بهره گرفته شده است. ربات‌های پایه و پیرو را به صورت سیستم‌های خطی پیوسته با زمان در نظر گرفته و از روش تأخیر در ورودی برای آنالیز پایداری استفاده گردیده است. به کمک تابع لیاپانف پیشنهادی، شرایط کافی جهت پایداری نمایی سیستم کنترل از راه دور با ساختار گسسته و شبکه‌ای، معرفی گردیده و مشاهده خواهد شد که این شرایط در مقایسه با کارهای قبلی حالات محافظه‌کارانه کمتری دارند. همچنین به دنبال محاسبه کران بالایی برای بازه نمونه‌برداری سیگنال‌های کنترلی واردشده بر ربات‌های پایه و پیرو خواهیم بود به گونه‌ای که خللی در پایداری نمایی سیستم وارد ننماید. به این منظور شرایط پایداری به دست آمده را به صورت یک مسئله بهینه‌سازی محدب و در قالب معادلات LMI تبدیل خواهیم کرد. در قسمت شبیه‌سازی نیز رفتار یک سیستم کنترل از راه دور، تحت نمونه‌برداری غیر یکنواخت نشان داده شده و نقش زمان نمونه‌برداری در مصالحه بین پایداری و شفافیت بررسی گردیده است.

کلیدواژه: سیستم کنترل از راه دور، ربات پایه و پیرو، سیستم کنترل شبکه‌ای، پایداری، نمونه‌برداری، معادلات LMI.

۱- مقدمه

کنترل از راه دور یا Teleoperation به معنای انجام کاری از یک فاصله معین است. پیشوند Tele از ریشه یونانی به معنای فاصله بوده و کنترل از راه دور طبیعتاً به معنای انجام عملیات از راه دور خواهد بود.

در پنجاه سال اخیر تحقیقات زیادی با هدف شناخت و حل مسایل مربوط به کنترل از راه دور صورت گرفته است. اولین سیستم کنترل از راه دور به صورت پیرو-پایه در سال ۱۹۴۰ توسط گورتز ساخته شد [۱]. این بحث مراحل مختلفی را از شناخت نحوه تعامل انسان و ربات تا تبدیل شدن به یک بحث تئوریک کنترلی طی کرده و بررسی‌های زیادی در این زمینه انجام گرفته است. در سالیان اخیر با پیشرفت در شبکه‌های ارتباطاتی و تکنولوژی ساخت ربات، تعداد دستگاه‌های کنترل از راه دور افزایش

این مقاله در تاریخ ۲۲ خرداد ماه ۱۳۹۵ دریافت و در تاریخ ۲۴ آذر ماه ۱۳۹۵ بازنگری شد.

امیر امین‌زاده قوی‌فکر، گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تبریز، تبریز، (email: aa.ghavifekr@tabrizu.ac.ir).

امیر ریخته‌گر غیائی، گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تبریز، تبریز، (email: agiasi@tabrizu.ac.ir).

محمدعلی بادامچی‌زاده، گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تبریز، تبریز، (email: mbadamchi@tabrizu.ac.ir).

فرزاد هاشم‌زاده، گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تبریز، تبریز، (email: hashemzadeh@tabrizu.ac.ir).

شبکه‌ای در [۲۸] تا [۳۰] مورد بحث قرار گرفته است. در این مقالات، تأخیر به صورت متغیر با زمان و نامعلوم و نرخ نمونه‌برداری نیز غیر یکنواخت در نظر گرفته شده و شرایط کافی برای پایداری ارائه گردیده است. این شرایط که در [۲۹] به صورت معادلات LMI بیان گردیده، حالات محافظه‌کارانه کمتری نسبت به شرایط معادلات [۲۸] دارد. ولی با توجه به پیچیدگی معادلات در [۲۹] اگر محدودیت‌های دیگری مانند کران پایین تأخیر برای آن در نظر گرفته شود تعداد معادلات LMI به شدت افزایش خواهد یافت.

در این مقاله بحث خود را بر روی سیستم‌های کنترل از راه دور گسسته خطی با ساختار شبکه‌ای متمرکز خواهیم کرد. در واقع ربات پیرو و پایه را به صورت یک سیستم خطی پیوسته با زمان در نظر می‌گیریم که سیگنال‌های خروجی آنها قبل از ورود به کنترل‌کننده به صورت غیر یکنواخت نمونه‌برداری می‌شوند. هدف اصلی پیدا کردن شرایطی برای پایداری نمایی سیستم‌های کنترل از راه دور خطی با ساختار شبکه‌ای و نمونه‌برداری غیر یکنواخت می‌باشد که با بررسی‌های انجام‌گرفته، این موضوع تا کنون در ادبیات کنترلی برای سیستم‌های کنترل از راه دور، مورد مطالعه قرار نگرفته است. همچنین به دنبال محاسبه کران بالایی برای زمان نمونه‌برداری خواهیم بود به گونه‌ای که خللی در پایداری نمایی سیستم وارد ننماید که به این منظور شرایط پایداری به دست آمده را به صورت یک مسئله بهینه‌سازی محدب و در قالب معادلات LMI تبدیل خواهیم کرد و برای حل آنها از تولاکس Yalmip [۳۱] استفاده خواهیم کرد.

با توجه به مقدمه بیان‌شده ساختار کلی مقاله به شرح زیر خواهد بود. در بخش دوم با مدل‌سازی سیستم‌های کنترل از راه دور خطی و کنترل‌کننده پیوسته با زمانی که هر دو شرط پایداری و شفافیت را برآورده کند آشنا می‌شویم. در بخش سوم مدل پیشنهادی برای گسسته‌سازی سیستم‌های کنترل از راه دور با ساختار شبکه‌ای ارائه گردیده و در بخش چهارم قضایای مربوط به پایداری مطرح شده است. بخش پنجم به ارائه نتایج شبیه‌سازی اختصاص دارد و در نهایت در بخش ششم نتیجه‌گیری مقاله بیان خواهد گردید.

۲- مدل‌سازی سیستم کنترل از راه دور خطی و کنترل‌کننده پیوسته با زمان

روش‌های متعددی برای مدل‌سازی و کنترل سیستم‌های کنترل از راه دور در ادبیات کنترلی پیشنهاد گردیده است. از جمله آنها می‌توان به بررسی معماری کنترل امپدانس دوطرفه برای سیستم‌های کنترل از راه دور با استفاده از مدل هیبرید و تئوری مدارات خطی اشاره کرد.

۲-۱ مدل‌سازی خطی سیستم به کمک تئوری شبکه

در این روش از تئوری شبکه که برای آنالیز مدارهای الکترونیکی استفاده می‌شود برای مدل‌سازی قسمت‌های مختلف سیستم کنترل از راه دور استفاده شده است. چون بازه تغییرات دست اپراتور محدود است دینامیک آن را می‌توان به صورت خطی تغییرناپذیر با زمان در نظر گرفت. با فرض این که اپراتور در تماس با ربات قسمت پایه می‌باشد، دینامیک اپراتور در حوزه لاپلاس را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت

$$F_h = \tilde{F}_h - Z_h V_h \quad (1)$$

که در آن F_h نیرویی است که اپراتور به پایه وارد می‌کند. Z_h و V_h نیز به ترتیب سرعت حرکت داده شده از اپراتور به پایه و امپدانس دست

برای بررسی سیستم‌های کنترل از راه دور گسسته پرداخته‌اند. یکی از مهم‌ترین تفاوت‌های سیستم‌های گسسته، وجود نگهدارنده مرتبه صفر در این سیستم‌ها می‌باشد [۱۵]. در [۱۶] شرط غیر فعال بودن برای یک سیستم هپتیک با فیدبک نیرو و کنترل‌کننده گسسته به دست آورده شده است. در [۱۷] با استفاده از مدل‌های خطی و جدول راث شرط پایداری سیستم فوق بررسی شده و معادله لازم برای پایداری معرفی گردیده است. با مقایسه نتایج این دو مقاله، ملاحظه می‌گردد که شرط مربوط به پایداری، محدودیت کمتری را برای میرایی رابط هپتیک نسبت به شرط غیر فعال بودن ایجاد می‌کند. همچنین در [۱۸] اثرات کوانتیزاسیون و اصطکاک در یک محیط مجازی بر روی پایداری سیستم‌های کنترل از راه دور با ساختار گسسته بیان گردیده است. در [۱۹] یک رؤیتگر پسیویتی برای مشاهده و کنترل انرژی موجود در کانال ارتباطی یک سیستم کنترل از راه دور با ساختار گسسته ارائه گردیده است. در [۲۰] شرایط کافی برای برقراری شرط غیر فعال بودن در یک سیستم کنترل از راه دور با معماری موقعیت-موقعیت و کنترل‌کننده‌های گسسته مورد بررسی قرار گرفته است. بررسی‌های انجام‌گرفته منجر به ایجاد کران‌هایی برای میرایی ربات‌های پایه و پیرو، زمان نمونه‌برداری و بهره‌های کنترلی گردیده است. نقص اصلی این مقاله آن است که بحث تأخیر در نظر گرفته نشده است. در [۲۱] بحث پایداری مطلق برای تله‌اپراتور (پایه + پیرو + کانال ارتباطی) در حالت گسسته مورد بررسی قرار گرفته است. در این حالت نیازی به غیر فعال بودن تله‌اپراتور نیست ولی اپراتور و محیط باز هم باید غیر فعال باشند. در این مقاله نیز نمونه‌برداری به صورت یکنواخت انجام گرفته است. همچنین هر دو تأخیر در مسیر رفت و برگشت به صورت مضرب صحیحی از زمان نمونه‌برداری در نظر گرفته شده‌اند. در روش پیشنهادی [۲۲] که در فرم پیوسته مورد بحث قرار گرفته است حتی نیازی به غیر فعال بودن اپراتور و محیط نیز نمی‌باشد و تنها بایستی کران‌هایی برای امپدانس آنها در نظر گرفت.

سیستم‌های کنترل شبکه‌ای، سیستم‌هایی هستند که در آنها اجزای مختلف (نظیر سنسورها، محرک‌ها و کنترل‌کننده‌ها) با استفاده از یک شبکه مخابراتی به یکدیگر وصل می‌شوند [۲۳]. در این مقاله به دنبال استفاده از ویژگی این سیستم‌ها در ساختارهای کنترل از راه دور خواهیم بود. از جمله مزایای آنها می‌توان به کاهش اتصالات فیزیکی، نگهداری ساده‌تر و ارزان‌تر و بهینه‌سازی هزینه اشاره نمود [۲۴]. از دست دادن شبکه در حین عملیات و تأخیر که جزو ذات آن می‌باشد از جمله معایب این سیستم‌ها هستند. در ادبیات کنترلی ساختارهای متفاوتی برای سیستم‌های کنترل شبکه‌ای معرفی گردیده است.

یکی دیگر از موضوعات مورد مطالعه در حوزه سیستم‌های کنترل شبکه‌ای بحث پایداری این سیستم‌ها با در نظر گرفتن محدودیت‌های داده‌ها در کانال‌های ورودی می‌باشد. این محدودیت می‌تواند مربوط به نرخ نمونه‌برداری از سیگنال، کوانتیزاسیون و یا نسبت سیگنال به نویز باشد. در [۲۵] این محدودیت به صورت یک نامعینی در نظر گرفته شده و برخلاف روش پیشنهادی در [۲۶] لزوماً بی‌حافظه یا تغییرناپذیر با زمان نمی‌باشد. به عبارتی به جای مطالعه کوانتیزه‌کننده‌های لگاریتمی به عنوان نامعینی، فرم کلی آن در نظر گرفته شده است که این کوانتیزه‌کننده‌ها بخشی از آن می‌باشند. در [۲۷] یک ساختار شبکه‌ای شامل یک سیستم خطی نمونه‌بردار و یک تأخیر متغیر با زمان نامعلوم مورد بحث قرار گرفته است. با این وجود دو عیب عمده آن این است که بازه‌های نمونه‌برداری در آن ثابت و یکنواخت فرض شده و تأخیر از بالا کران‌دار می‌باشد که آن کران بالا نیز تابعی از زمان نمونه‌برداری است. فرم کلی‌تر این ساختارهای

تعریف ۲- شفافیت یا حضور از راه دور: به وجود آوردن شرایطی برای ایجاد حس حضور از دور در اپراتور که به این مورد شفافیت سیستم بین محیط و اپراتور گفته می‌شود.

از آنجایی که در فرم گسسته از کنترل‌کننده $P+d$ استفاده خواهد شد در این قسمت به شرح کلی ساختار آن می‌پردازیم. اولین بار این نوع از کنترل‌کننده‌ها به صورت سیستماتیک در [۳۲] مطرح شده است. در ساختار پیشنهادی این مقاله از کنترل‌کننده‌های تناسبی- مشتق‌گیر در هر دو سمت پیرو و پایه استفاده گردیده است. با استفاده از مفاهیم پسیویتی و پایداری لیاپانف و قضیه لاسال در حضور تأخیر ثابت با زمان، پایداری سیستم مورد اثبات قرار گرفته و البته ایده خود این مقاله از [۳۳] و [۳۴] گرفته شده است. در [۳۳] ساختار $PD+d$ مطرح گردیده ولی پسیویتی آن مورد اثبات قرار نگرفته است. در [۳۴] هر چند این مشکل حل شده ولی در قانون کنترلی معرفی شده فرض گردیده که مقدار تأخیر کاملاً معین باشد. فرضی که در مسایل عملی بسیار غیر واقع‌بینانه می‌باشد و در نتیجه در [۳۲] از این فرض نیز صرف نظر گردیده است.

اهداف کنترلی بیان شده در این مقاله به شکل زیر می‌باشد:

$$\text{الف) } \text{if } t \rightarrow \infty \Rightarrow x_m(t) - x_s(t) \rightarrow 0$$

$$\text{ب) } \text{if } \dot{x}_m(t), \ddot{x}_m(t), \dot{x}_s(t), \ddot{x}_s(t) \rightarrow 0 \Rightarrow F_h(t) \rightarrow -F_e(t)$$

ج) خاصیت غیر فعال بودن برای سیستم برقرار باشد. یعنی $d \in R$ که در آن $\int_0^t [F_m^T(\theta)\dot{x}_m(\theta) + F_e^T(\theta)\dot{x}_s(\theta)]d\theta \geq -d^*$

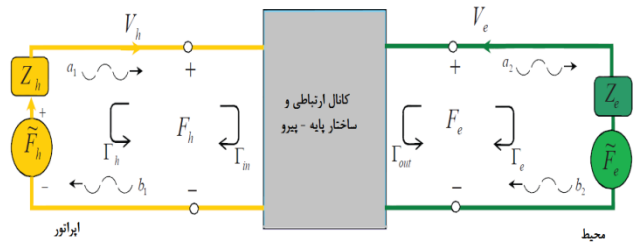
به منظور رسیدن به اهداف فوق کنترل‌کننده‌های $PD+d$ در (۷) معرفی شده‌اند. مزیت این کنترل‌کننده نسبت به موارد مشابه استفاده مستقیم از فیدبک موقعیت بین ربات‌های پایه و پیرو می‌باشد. در مقالات قبلی ابتدا سرعت از متغیرهای پراکندگی که توسط کانال مخابراتی منتقل می‌شدند به دست می‌آمد و سپس از آن انتگرال گرفته می‌شد تا موقعیت به دست آید. حال در صورت غیر دقیق بودن این انتگرال امکان ردیابی موقعیت بین پایه و پیرو وجود ندارد که نمونه‌ای از این مسئله در [۳۵] نشان داده شده است. همچنین همان طور که در [۳۲] نشان داده شده است، این کنترل‌کننده خاصیت غیر فعال بودن سیستم کنترل از راه دور را حتی در شرایطی که تأخیر از ربات پایه به پیرو یا تأخیر ارسالی از پیرو به پایه متفاوت باشد تضمین می‌کند

$$\begin{aligned} \tau_m(t) &= -K_v(\dot{x}_m(t) - \dot{x}_s(t - T_v)) - (K_d + P_e)\dot{x}_m(t) - \\ & K_p(x_m(t) - x_s(t - T_p)) \\ \tau_s(t) &= -K_v(\dot{x}_s(t) - \dot{x}_m(t - T_v)) - (K_d + P_e)\dot{x}_s(t) - \\ & K_p(x_s(t) - x_m(t - T_p)) \end{aligned} \quad (7)$$

که K_p, K_v ماتریس‌های بهره معین مثبت و P_e یک ضریب میرایی اضافی برای اطمینان از همگرایی موقعیت پایه و پیرو و T_v, T_p نیز تأخیر ارسال اطلاعات در مسیرهای رفت و برگشت می‌باشد. در [۳۲] با تعریف $K_d = ((T_v + T_p)/2)K_p$ نشان داده شده است که با کنترل‌کننده‌های معرفی شده می‌توان تمام اهداف کنترلی بیان شده را محقق کرد. البته میل کردن خطای موقعیت به صفر زمانی رخ می‌دهد که نیرویی از سمت اپراتور و محیط وارد نشود. در غیر این صورت با فرض غیر فعال بودن اپراتور و محیط تنها می‌توان ادعا کرد که این خطا محدود است.

۳- مدل پیشنهادی برای سیستم‌های کنترل از راه دور با ساختار شبکه‌ای

فرض می‌کنیم که سیگنال‌های موقعیت و سرعت برای هر دو ربات پیرو و پایه در لحظه‌های نمونه‌برداری t_k که در آن $k \in N$



شکل ۲: مدل مداری ساختار خطی سیستم کنترل از راه دور.

اپراتور می‌باشد. \tilde{F}_h نیز نیروی خارجی ناشی از اغتشاشات وارد بر ربات پایه می‌باشد. در این قسمت، منظور از امپدانس در واقع یک نگاشت بین نیروی اعمالی خارجی بر ربات پایه و جابجایی آن می‌باشد که از لحاظ عملی به اصطکاک و ساختار مکانیکی سیستم بستگی دارد.

هر چند محیط اغلب دارای ساختاری غیر خطی، تغییرپذیر با زمان و غیر هولونومیک است ولی اگر ربات پیرو با محیط در تماس دائم باشد، مانند قسمت اپراتور، دینامیک محیط را نیز می‌توان به صورت خطی دمپر-جرم- فنر در نظر گرفت و به شکل زیر نشان داد

$$F_e = \tilde{F}_e - Z_e V_e \quad (2)$$

که Z_e امپدانس محیط و V_e و F_e به ترتیب سرعت و نیروی اعمالی ربات پیرو بر روی محیط را نشان می‌دهند. \tilde{F}_e نیز نیروی خارجی تولیدشده توسط محیط است که غالباً صفر در نظر گرفته می‌شود.

با فرض آن که ربات پایه با اپراتور و ربات پیرو با محیط در تماس است، دینامیک ربات‌های پایه و پیرو را نیز می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت

$$\begin{aligned} Z_m V_h &= F_h + \tau_m \\ Z_s V_e &= -F_e + \tau_s \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن

$$\begin{aligned} Z_m &= M_m s + B_m \\ Z_s &= M_s s + B_s \end{aligned} \quad (4)$$

که B_m, B_s, M_m, M_s بیانگر جرم و میرایی ربات‌های پیرو و پایه و τ_m, τ_s نیز ورودی‌های کنترلی می‌باشند. فرم نهایی معادلات را می‌توان به شکل زیر نشان داد

$$\begin{aligned} F_m &= (M_m s^2 + B_m s)x_m \\ F_s &= (M_s s^2 + B_s s)x_s \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن x_m و x_s به ترتیب موقعیت ربات پایه و ربات پیرو می‌باشند. همچنین داریم

$$\begin{aligned} F_m &= F_h + \tau_m \\ F_s &= -F_e + \tau_s \end{aligned} \quad (6)$$

مدار الکتریکی معادل با مدل‌سازی‌های فوق در شکل ۲ نمایش داده شده است.

۲-۲ کنترل‌کننده پیوسته با زمان جهت تأمین شفافیت با حفظ پایداری

از نقطه نظر کنترلی، دو هدف اصلی در بحث سیستم‌های کنترل از راه دور عبارتند از:

تعریف ۱- پایداری: حفظ پایداری در سیستم حلقه بسته کنترل از راه دور بدون در نظر گرفتن شرایط موجود در محیط و رفتار کاربر.

در بخش بعد ضمن تعیین شرایط پایداری نمایی برای این سیستم، بزرگ‌ترین کران برای تأخیر بین زمان‌های نمونه‌برداری را که منجر به از دست رفتن پایداری نمایی نگردد محاسبه خواهیم کرد. به این منظور و برای مرتبط کردن سیستم شبکه‌ای با بحث سیستم‌های تأخیردار از روش تأخیر در ورودی [۲۹] استفاده می‌کنیم. در این روش سیستم نمونه‌برداری شده به صورت یک سیستم پیوسته با زمان که دارای یک ورودی دارای تأخیر است مدل‌سازی می‌گردد و سپس از توابع لیاپانف-کراسوفسکی برای اثبات پایداری سیستم استفاده می‌گردد. در واقع زمان‌های نمونه‌برداری در (۱۱) با بازه‌های نمونه‌برداری دارای تأخیر که در (۹) تعریف شده‌اند جایگزین گردیده است. در این صورت می‌توان ورودی‌های کنترلی را به شکل زیر تعریف کرد

$$\begin{aligned} \tau_m(t) &= -K_v(\dot{x}_m(t - \mu_s) - \dot{x}_s(t - \mu_s - T_v)) - \\ & (K_d + P_e)\dot{x}_m(t - \mu_s) - K_p(x_m(t - \mu_s) - \\ & x_s(t - \mu_s - T_v)) \\ \tau_s(t) &= -K_v(\dot{x}_s(t - \mu_s) - \dot{x}_m(t - \mu_s - T_v)) - \\ & (K_d + P_e)\dot{x}_s(t - \mu_s) - K_p(x_s(t - \mu_s) - \\ & x_m(t - \mu_s - T_v)) \end{aligned} \quad (12)$$

به عبارتی سیستم (۵) با کنترل‌کننده‌های (۱۲) را می‌توان به عنوان یک سیستم خطی با تأخیر گسسته با زمان و متغیر در ورودی به اندازه μ_s در نظر گرفت. توابع لیاپانف متعددی برای پایداری سیستم‌ها با تأخیر ورودی پیشنهاد گردیده است. در بخش بعد ضمن معرفی قضایا و تابع لیاپانف پیشنهادی برای پایداری نمایی سیستم کنترل از راه دور با ساختار نمونه‌برداری غیر یکنواخت، نتایج به دست آمده را با دو نمونه از تحقیقات اخیر نیز مقایسه خواهیم نمود.

۴- تحلیل پایداری مدل پیشنهادی

در این بخش، ابتدا قضیه مربوط به پایداری نمایی سیستم‌های کنترل از راه دور شبکه‌ای و تابع لیاپانف پیشنهادی برای آن ارائه خواهد گردید و سپس مسئله پیدا کردن کران بالا برای زمان‌های نمونه‌برداری متغیر با زمان به گونه‌ای که پایداری نمایی حفظ گردد به عنوان یک مسئله بهینه‌سازی محدب و در قالب معادلات LMI مورد مطالعه قرار خواهد گرفت.

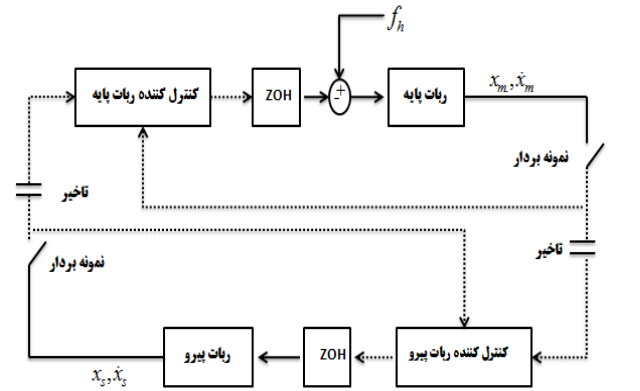
برای مدل‌سازی سیستم از معادلات دیفرانسیل کاهشی [۳۶] استفاده گردیده است. فرض می‌کنیم که فضای $W([-\tau, 0], X)$ شامل تمام توابع اکیداً پیوسته باشد که در واقع بازه $[-\tau, 0]$ را به X نگاشت می‌کند. برای هر $x_t \in W$ داریم

$$x_t(r) = x(t+r) \quad , \quad -\tau \leq r \leq 0 \quad (13)$$

همچنین در کل مقاله از تعریف زیر برای نرم استفاده خواهد گردید [۳۷]

$$\|x_t\|_\infty = \max |x_t(r)| + \left[\int_{-\tau}^0 |x_t(r)|^2 dr \right]^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

که در این معادله، ماکسیمم $x_t(r)$ نسبت به متغیر r مد نظر می‌باشد. از آنجایی که بحث اصلی مقاله، پایداری نمایی سیستم در حالت نمونه‌برداری غیر یکنواخت می‌باشد و تأخیر ذاتی را نیز به صورت تأخیر در ورودی مدل‌سازی کرده‌ایم، فرض می‌کنیم که تأخیر ارسال نمونه‌ها از ربات‌های پایه و پیرو به کنترل‌کننده‌ها ثابت باشد. میزان این تأخیر از ربات پایه به کنترل‌کننده ربات پیرو را با T_v و از ربات پیرو به کنترل‌کننده ربات پایه را با T_s نشان می‌دهیم.



شکل ۳: مدل پیشنهادی برای سیستم کنترل از راه دور گسسته با ساختار شبکه‌ای.

نمونه‌برداری می‌شوند. در هر حالت، سیگنال نمونه‌برداری شده از طریق شبکه و در قالب یک بسته اطلاعاتی ارسال می‌گردد. مدل پیشنهادی از دو نمونه‌برداری با بازه‌های نمونه‌برداری متغیر با زمان و دو نگهدارنده صفر تشکیل یافته است. جهت سادگی نمایش متغیرها و بدون آن که خللی به کلیت مسئله وارد شود، دو نمونه‌برداری و نگهدارنده‌های مرتبه صفر را از لحاظ بازه‌های نمونه‌برداری و به روز رسانی کاملاً مشابه در نظر می‌گیریم.

ساختار کلی مدل پیشنهادی در شکل ۳ نمایش داده شده که در آن سیگنال‌های گسسته با خطچین نمایش داده شده‌اند.

سیگنال‌های خروجی ربات‌های پایه و پیرو که در لحظه‌های \hat{t}_k نمونه‌برداری می‌شوند با یک تأخیر به کنترل‌کننده‌ها خواهند رسید که مقدار این تأخیر را برای هر نمونه با T_k نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم که این تأخیر کران‌دار بوده و $0 \leq T_{\min} \leq T_k \leq T_{\max}$.

مدت زمانی را که طول می‌کشد تا نمونه‌های خروجی از ربات‌های پایه و پیرو به کنترل‌کننده‌ها برسند را با t_k نمایش داده و برای محاسبه آن داریم

$$t_k = \hat{t}_k + T_k \quad , \quad k \in \mathbb{N} \quad (8)$$

دو نگهدارنده مرتبه صفر، سیگنال‌های کنترلی را در بازه‌های زمانی $[t_k, t_{k+1}]$ و تا زمانی که داده کنترلی جدیدی در لحظه t_{k+1} برسد ثابت نگه داشته و به ربات پیرو و پایه اعمال می‌کنند. تأخیر متغیر، بین زمان‌های نمونه‌برداری را به صورت تابع زیر تعریف می‌کنیم که $\mu(t)$ زمانی است که بین دو لحظه نمونه‌برداری متوالی $[t_k, t_{k+1}]$ وجود دارد و به عبارتی

$$\mu(t) \triangleq t - \hat{t}_k = t - t_k + T_k \quad (9)$$

بیشترین بازه‌ای را که ممکن است بین دو بازه نمونه‌برداری رخ دهد با γ نشان داده و داریم

$$\gamma = \sup(\mu(t)) = \sup(\hat{t}_{k+1} - \hat{t}_k) \quad (10)$$

و در نتیجه داریم $T_{\min} \leq \mu(t) \leq \gamma$. حال قوانین کنترلی معرفی شده در (۷) را می‌توان با در نظر گرفتن معادلات فوق به شکل زیر نوشت

$$\begin{aligned} \tau_m(t) &= -K_v(\dot{x}_m(\hat{t}_k) - \dot{x}_s(\hat{t}_k - T_v)) - \\ & (K_d + P_e)\dot{x}_m(\hat{t}_k) - K_p(x_m(\hat{t}_k) - x_s(\hat{t}_k - T_v)) \\ \tau_s(t) &= -K_v(\dot{x}_s(\hat{t}_k) - \dot{x}_m(\hat{t}_k - T_s)) - \\ & (K_d + P_e)\dot{x}_s(\hat{t}_k) - K_p(x_s(\hat{t}_k) - x_m(\hat{t}_k - T_s)) \end{aligned} \quad (11)$$

که در آن $t \in [t_k, t_{k+1}]$.

$$V(t, x_t) = V_1 + V_2 + V_3, \quad t \in [t_n, t_{n+1}] \quad (20)$$

قسمت‌های V_2, V_1 قبلاً در مراجع پیشنهاد شده‌اند [۳۷] و آنها را به شکل زیر در نظر می‌گیریم

$$V_1 = x(t)^T P x(t) \quad (21)$$

که ماتریس P یک ماتریس معین مثبت دلخواه می‌باشد. این تعریف یک فرم شناخته‌شده است و مانع از دور شدن بردار مکان و سرعت از اطراف مبدأ می‌گردد

$$V_2 = (\gamma - \mu)(x(t) - x(t_n))^T X(x(t) - x(t_n)) \quad (22)$$

که ماتریس X یک ماتریس معین مثبت دلخواه می‌باشد. این قسمت نیز از انحراف بردار موقعیت و سرعت فعلی ربات‌های پیرو و پایه از بردار حالت نمونه‌برداری شده جلوگیری می‌کند.

حال بخش V_3 را به گونه‌ای معرفی می‌کنیم که از انحراف بردار موقعیت و سرعت ربات‌های پیرو و پایه و بردار نمونه‌برداری شده در بازه $[t - \mu, t]$ جلوگیری کند. انتخاب این تابع لیپانف منجر به دستیابی به LMI‌هایی با کران بالای نمونه‌برداری بزرگ‌تر جهت پایداری نمایی سیستم می‌گردد

$$V_3 = (\gamma - \mu) \times \int_{t-\mu}^t e^{\alpha(s-t)} [\dot{x}^T(s) x^T(t_n)] R [\dot{x}^T(s) x^T(t_n)]^T ds \quad (23)$$

در این معادله نیز ماتریس R یک ماتریس معین مثبت دلخواه می‌باشد. حال بایستی بررسی کنیم که تابع لیپانف پیشنهادی کلیه بندهای (۱۷) را ارضا نماید. به این منظور و برای تحقق بند اول از (۱۷) ابتدا باید کران‌هایی را برای تابع لیپانف در نظر گرفت. این کران‌ها را به شکل زیر در نظر می‌گیریم

$$\lambda_{\min}(P) |x(t)|^T \leq V_1 \leq \lambda_{\max}(P) |x(t)|^T \quad (24)$$

از آنجایی که $|x(t)| \leq \|x_t\|_{\infty}$ نتیجه می‌شود که

$$\lambda_{\min}(P) |x_t(\cdot)|^T \leq V_1 \leq \lambda_{\max}(P) \|x(t)\|_{\infty}^T \quad (25)$$

برای V_2 می‌توان نوشت

$$V_2 \leq \gamma \lambda_{\max}(R) \left(\int_{t-\mu}^t |\dot{x}(s)|^T ds + \int_{t-\mu}^t |x(t_n)|^T ds \right) \quad (26)$$

با تغییر متغیر و استفاده از تعریف نرم در (۱۴)، (۲۶) به فرم زیر درمی‌آید

$$|x(t_n)| \leq \|x_t\|_{\infty} \rightarrow V_2 \leq \gamma \lambda_{\max}(R) (1 + \gamma) \|x_t\|_{\infty}^T \quad (27)$$

به طریق مشابه برای V_3 نیز داریم

$$V_3 \leq \gamma \lambda_{\max}(X) \|x_t\|_{\infty}^T \quad (28)$$

در مرحله بعد، برای اثبات آن که تابع لیپانف معرفی شده در بند ۳ (۱۷) صدق می‌کند بایستی مشتق توابع لیپانف را حساب کنیم. مشتق V_1 که به سادگی از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\dot{V}_1 = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \quad (29)$$

برای V_2 نیز داریم

$$\dot{V}_2 = -(x(t) - x(t_n))^T X(x(t) - x(t_n)) + (\gamma - \mu)(\dot{x}^T(t) X(x(t) - x(t_n)) + (x(t) - x(t_n))^T X \dot{x}(t)) \quad (30)$$

فرم کلی معادلات دیفرانسیل کاهشی به شکل زیر خواهد بود

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \quad (15)$$

که در آن $x(t) \in X$ و $f: R \times W \rightarrow R^n$. به عبارتی این معادله نشان می‌دهد که $\dot{x}(t)$ تابعی از t و $x(s)$ است که در آن $t - \tau \leq s \leq t$.

تعریف پایداری نمایی برای سیستم‌های دیفرانسیلی کاهشی به شکل زیر است:

پاسخ $x(t)$ برای معادله $\dot{x} = f(t, x_t)$ به صورت نمایی پایدار محلی یکنواخت است اگر برای هر $\Omega \subseteq \omega([- \tau, 0], x)$ یک $\delta > 0$ و $\lambda > 0$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که برای هر شرط اولیه $x \in \Omega$ پاسخ $x(t)$ در معادله زیر صدق کند

$$|x(t)| \leq \delta e^{-\lambda t} \|x\|_{\infty} \quad (16)$$

از آنجایی که بررسی شرط فوق به تنهایی دشوار است به این منظور قضیه زیر برای آن مطرح می‌گردد [۳۷] و [۳۸]:

قضیه یک: برای $\lambda > 0$ جواب معادله $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$ به صورت یکنواخت پایدار نمایی جامع است اگر تابع لیپانفی مانند $V(t, x_t)$ وجود داشته باشد که اولاً مشتق پذیر بوده و ثانیاً در روابط زیر صدق کند

$$\begin{aligned} c_1 |x_t(\cdot)|^T &\leq V(t, x_t) \leq c_2 \|x_t\|_{\infty}^T \\ V(t_n, x_{t_n}) &\leq V(t_n^-, x_{t_n}^-), \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \dot{V}(t, x_t) + \lambda V(t, x_t) &< 0, \quad \forall t \neq t_n, n \in \mathbb{N} \\ 0 &< \varepsilon < t_{n+q} - t_n \end{aligned} \quad (17)$$

که در این روابط c_1, c_2 و ε اسکالرهایی مثبت هستند و همچنین q یک عدد صحیح می‌باشد. همچنین داریم

$$V(t_n^-, x_{t_n}^-) = \lim_{t \rightarrow t_n^-} V(t, x_t) \quad (18)$$

حال با توجه به تعاریف و قضایای فوق، سعی می‌کنیم تابع لیپانفی را پیشنهاد دهیم که در روابط ذکر شده صدق کند. توابع لیپانفی که برای آنالیز این گونه سیستم‌ها در ادبیات کنترلی پیشنهاد گردیده‌اند معمولاً شامل انتگرال‌هایی از توابع کوادراتیک از بردارهای حالت هستند. برای مثال وقتی مشتق تأخیر $d(t)$ کمتر از یک باشد ($d(t) < 1$) غالباً از تابع لیپانفی با ساختار زیر استفاده می‌گردد

$$V = V_1 + V_2 = \int_{t-d(t)}^t x^T(s) W_1 x(s) ds + \int_{t-\gamma}^t x^T(s) W_2 x(s) ds \quad (19)$$

که در آن W_1 و W_2 ماتریس‌های مثبت معین دلخواه می‌باشند. اگر $d(t) < 1$ باشد تابع LKF (با توجه به آن که عبارت قسمت اول معادله فوق در بازه $[t - d(t), t]$ می‌باشد) به علت استفاده از اطلاعات موجود از مشتق زمانی تأخیر، منجر به شرایط محدودکننده کمتری برای پایداری می‌گردد. ولی در بحث مطرح شده در مقاله مشاهده می‌گردد که برای $t \in (t_k, t_{k+1})$ داریم $\dot{d}(t) = \dot{\mu}(t) = 1$. در این حالت خواهیم داشت $\dot{V}_1 = x^T W_1 x > 0$ و بنابراین اضافه کردن V_2 به تنهایی به تابع لیپانف سودمند نمی‌باشد چون یک عبارت مثبت را به مشتق تابع لیپانف اضافه می‌کند.

به منظور حل این مشکل، فرم کلی تابع لیپانف پیشنهادی را به شکل زیر در نظر می‌گیریم

$$\dot{x} = f(t, x_t) \rightarrow f(t, x_t) = Ax(t) + BKx_t(-\mu) \tag{38}$$

$$\dot{x}_m(t) = [A_m - B_m K_p - B_m(K_v + K_d + P_\varepsilon) - B_m - B_m] \chi_m(t)$$

که در معادله فوق

$$\chi_m(t) = [x_1(t) \ x_1(\hat{t}_k) \ \dot{x}_1(\hat{t}_k) \ \dot{x}_1(\hat{t}_k - T_r) \ x_1(\hat{t}_k - T_r)]^T \tag{39}$$

برای ربات پیرو نیز داریم

$$\dot{x}_s(t) = [A_s - B_s K_p - B_s(K_v + K_d + P_\varepsilon) - B_s - B_s] \chi_s(t) \tag{40}$$

که در این معادله نیز

$$\chi_s(t) = [x_s(t) \ x_s(\hat{t}_k) \ \dot{x}_s(\hat{t}_k) \ \dot{x}_s(\hat{t}_k - T_r) \ x_s(\hat{t}_k - T_r)]^T \tag{41}$$

از آنجایی که نمونه بردارها و ضرایب کنترل کننده ها یکسان فرض گردیده اند، مراحل اثبات را برای (۳۸) و (۳۹) نشان می دهیم و این مراحل عیناً برای (۴۰) و (۴۱) نیز می توانند تکرار گردند.

با توجه به (۲۵)، (۲۷) و (۲۸) و کران دار بودن تک تک قسمت های مختلف تابع لیاپانف پیشنهادی، درستی بند یک از (۱۷) اثبات می گردد. تابع معرفی شده در (۲۱) فرم کوادراتیک داشته و پیوسته است. تابع (۲۳) نیز در بین بازه های نمونه برداری پیوسته می باشد و با توجه به رابطه $\mu(t) = t - \hat{t}_n$ این تابع در لحظه های نمونه برداری صفر شده و در نتیجه در لحظه های نمونه برداری \hat{t}_n غیر افزایشی می باشد. تابع (۲۲) نیز در بین بازه های نمونه برداری پیوسته بوده و در لحظه های \hat{t}_n نیز نامنفی است. بنابراین هر سه تابع بند دوم (۱۷) را ارضا می کنند. حال برای بررسی بند سوم (۱۷)، بایستی از (۲۹)، (۳۰) و (۳۳) استفاده نماییم.

با فرض آن که $h(t) = G^T \chi_m(t)$ در آن G یک ماتریس مربعی با ابعاد مناسب می باشد (۴۲) را داریم.

حال می توان (۴۳) را نوشت و ملاحظه می گردد که به ازای $\mu = 0$ معادله LMI (۳۴)، شرط $\dot{V} + \alpha V < 0$ را برآورده می کند. همچنین با استفاده از نامساوی شر، LMI (۳۵) نیز شرط $\dot{V} + \alpha V < 0$ را به ازای $\mu = \gamma$ برآورده می کند. چون معادله فوق برحسب μ به صورت افاین است LMI های (۳۴) و (۳۵) می توانند به عنوان شرایط کافی برای برقراری معادله $\dot{V} + \alpha V < 0$ در بازه $\mu \in (0, \gamma)$ در نظر گرفته شوند و (۱۷) را برآورده نمایند. بند چهارم از (۱۷) را نیز می توان به عنوان یک فرض در نظر گرفت که طبق آن، بین هر دو زمان نمونه برداری یک فاصله ε وجود دارد و زمان های نمونه برداری متوالی روی هم نمی افتند و بدین شکل اثبات کامل می گردد.

برای محاسبه مشتق V_r داریم

$$\dot{V}_r = - \int_{t-\mu}^t e^{\alpha(s-t)} [\dot{x}^T(s) x^T(t_n)] R [\dot{x}^T(s) x^T(t_n)]^T ds + (\gamma - \mu) [\dot{x}^T(t) x^T(t_n)] R [\dot{x}^T(t) x^T(t_n)]^T - \alpha V_r \tag{31}$$

برای هر $R > 0, \alpha > 0, s \in [t-\mu, t], 0 \leq \mu < \gamma$ و بردار تغییرپذیر با زمان دلخواه $h(t)$ می توان نوشت

$$[[\dot{x}^T(s) \ x^T(t_n)] \ h^T] \begin{bmatrix} e^{\alpha(s-t)R} & -I \\ -I & e^{\alpha\gamma} R^{-1} \end{bmatrix} \times [[\dot{x}^T(s) \ x^T(t_n)]^T \ h^T]^T \geq 0 \tag{32}$$

بنابراین (۳۱) را می توان به فرم زیر نوشت

$$\dot{V}_r \leq \mu h^T e^{\alpha\gamma} R^{-1} h - [x^T - x^T(t_n) \ \mu x^T(t_n)] h - h^T [x^T - x^T(t_n) \ \mu x^T(t_n)]^T + (\gamma - \mu) [\dot{x}^T \ x^T(t_n)] R [\dot{x}^T \ x^T(t_n)]^T - \alpha V_r \tag{33}$$

حال با توجه به تابع لیاپانف پیشنهادی و کران ها و مشتق های محاسبه شده و مقایسه آنها با روابط فوق می توان قضیه زیر را ارائه کرد:

قضیه دو: یک سیستم کنترل از راه دور خطی با (۵) و کنترل کننده های (۱۲) را در نظر بگیرید که ربات های پایه و پیرو درون یک ساختار شبکه ای نمونه بردار قرار دارند و دارای بازه های نمونه برداری غیر یکنواخت با ماکسیمم γ می باشند. این سیستم برای $\alpha > 0$ به صورت نامای یکنواخت کلی پایدار است اگر ماتریس های مثبت معین P, R, X و ماتریس G با ابعاد مناسب به گونه ای وجود داشته باشند که در روابط زیر صدق کنند

$$\Omega + \gamma \Lambda_1 < 0 \tag{34}$$

$$\begin{bmatrix} \Omega + \gamma \Lambda_r & \gamma G \\ \gamma G^T & -\gamma e^{-\alpha\gamma} R \end{bmatrix} < 0 \tag{35}$$

که در این معادلات با فرض آن که

$$\Sigma = [A_i - B_i K_p - B_i(K_v + K_d + P_\varepsilon) - B_i - B_i] \tag{36}$$

که در آن اندیس i برای $i = m$ نشان دهنده ربات پایه و برای $i = s$ نشان دهنده ربات پیرو می باشد، (۳۷) را داریم.

اثبات: برای اثبات کافی است نشان دهیم که LMI های معرفی شده در (۳۴) و (۳۵) شرایط کافی برای برآورده کردن نامعادلات (۱۷) می باشند. می توانیم معادله ربات پایه و پیرو را به شکل (۳۸) نشان دهیم

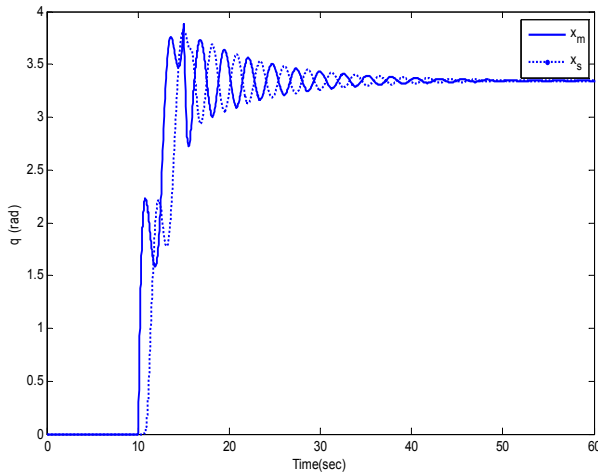
$$\Omega = \Sigma^T [P \cdot] + [P \cdot]^T \Sigma + \alpha [I \cdot]^T P [I \cdot] - [I - I]^T X [I - I] - \begin{bmatrix} I & -I \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}^T G^T - G \begin{bmatrix} I & -I \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \tag{37}$$

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} A_i & B_i K_p & B_i(K_v + K_d + P_\varepsilon) & -B_i & -B_i \\ \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}^T R \times \begin{bmatrix} A_i & B_i K_p & B_i(K_v + K_d + P_\varepsilon) & -B_i & -B_i \\ \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} +$$

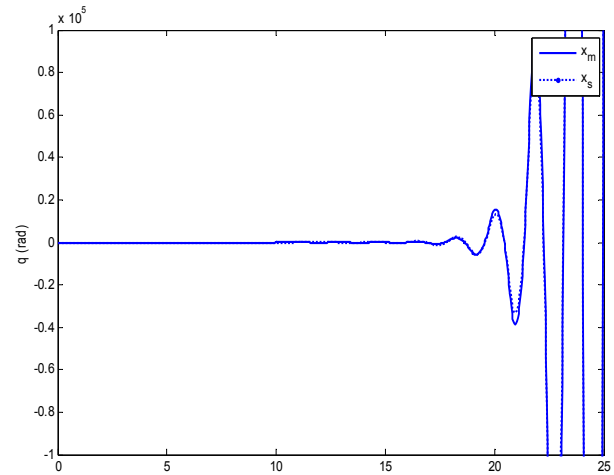
$$\alpha [I - I]^T X [I - I] + \Sigma^T X [I - I] + [I - I]^T X \Sigma$$

$$\Lambda_r = - \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & I \end{bmatrix}^T G^T - G \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} + \alpha V &= \dot{V}_m + \dot{V}_r + \dot{V}_s + \alpha (V_m + V_r + V_s) \leq \dot{x}_m^T P x_m + x_m^T P \dot{x}_m + \mu h^T e^{\alpha\gamma} R^{-1} h - [x_m^T - x_m^T(t_n) \ \mu x_m^T(t_n)] h - \\ &h^T [x_m^T - x_m^T(t_n) \ \mu x_m^T(t_n)]^T + (\gamma - \mu) [\dot{x}_m^T \ x_m^T(t_n)] R [\dot{x}_m^T \ x_m^T(t_n)]^T - \alpha V_r - (x_m(t) - x_m(t_n))^T X (x_m(t) - x_m(t_n)) + \\ &(\gamma - \mu) (\dot{x}_m^T(t) X (x_m(t) - x_m(t_n)) + (x_m(t) - x_m(t_n))^T X \dot{x}_m(t)) + \alpha V_r + \alpha x_m(t)^T P x_m(t) + \\ &\alpha (\gamma - \mu) (x_m(t) - x_m(t_n))^T X (x_m(t) - x_m(t_n)) \end{aligned} \tag{42}$$



شکل ۵: سیگنال موقعیت ربات‌های پایه و پیرو با بازه نمونه‌برداری ۰/۱۸ ثانیه.



شکل ۴: سیگنال موقعیت ربات‌های پایه و پیرو با بازه نمونه‌برداری غیر یکنواخت بدون کران بالا برای بازه‌ها که منجر به ناپایداری سیستم گردیده است.

جدول ۱: مقایسه کران بالای زمان نمونه‌برداری جهت پایداری نمایی سیستم پیشنهادی.

قضیه ۲	مرجع [۳۸]	مرجع [۳۷]
۰/۱۸ ثانیه	۰/۰۹۱ ثانیه	۰/۰۲۴ ثانیه

۵- شبیه‌سازی‌ها و نتایج

در این قسمت معادلات کلی ربات‌های پایه و پیرو به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$A_m = \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ \cdot & -\frac{b_m}{m_m} \end{bmatrix}, \quad A_s = \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ \cdot & -\frac{b_s}{m_s} \end{bmatrix} \quad (۴۴)$$

که برای جرم و میرایی ربات‌های پایه و پیرو داریم

$$b_m = b_s = 1, \quad m_m = m_s = 10 \quad (۴۵)$$

اپراتور انسانی را نیز به صورت یک ساختار جرم و فنر با ضریب سختی ۷۵ N/m و ضریب میرایی ۵۰ Ns/m در نظر می‌گیریم که در بازه زمانی ۱۰ الی ۲۰ ثانیه نیروی خود را به ربات پایه اعمال کرده و سپس قطع می‌گردد. زمان‌های تأخیر T_r, T_s نیز به ترتیب ۰/۴۵s, ۰/۶۵s در نظر گرفته می‌شوند. بهره‌های کنترلی در (۱۲) نیز به صورت $K_p = 50$ و با توجه به رابطه $K_d = ((T_r + T_s)/2)K_p$ و این که جمع کل خطای رفت و برگشت یک ثانیه در نظر گرفته می‌شود، بهره $K_d = 25$ انتخاب می‌گردد. همچنین داریم $P_\varepsilon = 0.01K_d$ و $K_v = 1$. اگر برای بازه‌های نمونه‌برداری متغیر، محدودیت و کران بالایی اعمال نگردد پایداری سیستم قابل تضمین نمی‌باشد. شکل ۴ سیگنال خروجی موقعیت ربات‌های پایه و پیرو را در این حالت نشان می‌دهد.

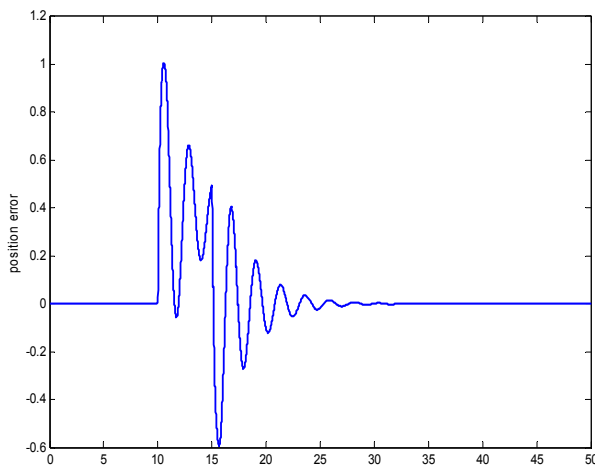
حال با حل LMI (۳۴) و (۳۵) به کمک نرم‌افزار yalmip میزان بیشترین مقدار فاصله بین زمان‌های نمونه‌برداری یکنواخت که آن را با γ نشان دادیم، ۰/۱۸ ثانیه به دست می‌آید. این در حالی است که اگر برای حل این مسأله از تعمیم‌یافته معادلات مطرح‌شده در [۳۷] و [۳۸] برای سیستم‌های کنترل از راه دور استفاده نماییم کران بالای زمان نمونه‌برداری مقادیر کمتری به دست می‌آید که این مطلب در جدول ۱ نشان داده شده است.

سیگنال خروجی موقعیت ربات‌های پایه و پیرو به ازای زمان نمونه‌برداری ۰/۱۸ ثانیه در شکل ۵ نمایش داده شده است.

در سیستم‌های کنترل از راه دور می‌توان در مورد دو نوع اغتشاش نیز بحث نمود. اغتشاشی که به ربات پایه وارد می‌شود و اغتشاشی که ربات پیرو را تحت تأثیر قرار می‌دهد. به عنوان مثال، یکی از کاربردهای مهم سیستم‌های کنترل از راه دور عملیات جراحی از راه دور می‌باشد. در این سیستم‌ها می‌توان لرزش دست جراح را به عنوان اغتشاش واردشده بر ربات پایه و شوک عصبی بدن بیمار را به عنوان اغتشاش وارد بر ربات پیرو در نظر گرفت. به عنوان مثال فرض می‌گردد که یک اغتشاش پله‌ای در بین لحظات ۲۸ و ۳۰ ثانیه از طرف دست جراح بر سیستم وارد می‌گردد و اثر آن در شکل ۶ نمایش داده شده است. ملاحظه می‌گردد که خطای ردیابی مجدداً ولی با کمی تأخیر به سمت صفر میل می‌نماید.

یکی از نکات مهمی که می‌توان در مورد آن بحث کرد تقابل بین پایداری و شفافیت سیستم‌های کنترل از راه دور می‌باشد. می‌دانیم که برای افزایش شفافیت سیستم‌های کنترل از راه دور بایستی بهره‌های کنترلی را افزایش دهیم ولی همان گونه که از (۳۴) و (۳۵) دیده می‌شود این امر می‌تواند منجر به از دست رفتن پایداری سیستم گردد. یکی از مزایای نمونه‌برداری متغیر با زمان و تعیین کران بالای زمان نمونه‌برداری آن است که می‌توان در صورت لزوم مصالحه‌ای بین پایداری و شفافیت

$$\begin{aligned} \dot{V} + \alpha V \leq & \chi_m^T [A_m - B_m K_p - B_m (K_v + K_d + P_\varepsilon) - B_m - B_m]^T P [I \cdot] + \\ & [I \cdot]^T P [A_m - B_m K_p - B_m (K_v + K_d + P_\varepsilon) - B_m - B_m] + \alpha [I \cdot]^T P [I \cdot] + \dots + \mu G e^{\alpha \gamma} R^{-1} G^T - \\ & \begin{bmatrix} I & -I \\ \cdot & \mu I \end{bmatrix}^T G^T - G \begin{bmatrix} I & -I \\ \cdot & \mu I \end{bmatrix} + (\gamma - \mu) \begin{bmatrix} A_m & B_m K_p & B_m (K_v + K_d + P_\varepsilon) & -B_m & -B_m \\ \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}^T \times \\ & R \begin{bmatrix} A_m & B_m K_p & B_m (K_v + K_d + P_\varepsilon) & -B_m & -B_m \\ \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} + \alpha [(\gamma - \mu) - 1] [I \cdot - I]^T X [I \cdot - I] + \\ & (\gamma - \mu) [A_m - B_m K_p - B_m (K_v + K_d + P_\varepsilon) - B_m - B_m]^T \times X [I \cdot - I] + (\gamma - \mu) [I \cdot - I]^T X \times \\ & [A_m - B_m K_p - B_m (K_v + K_d + P_\varepsilon) - B_m - B_m] \chi_m \end{aligned} \quad (۴۳)$$

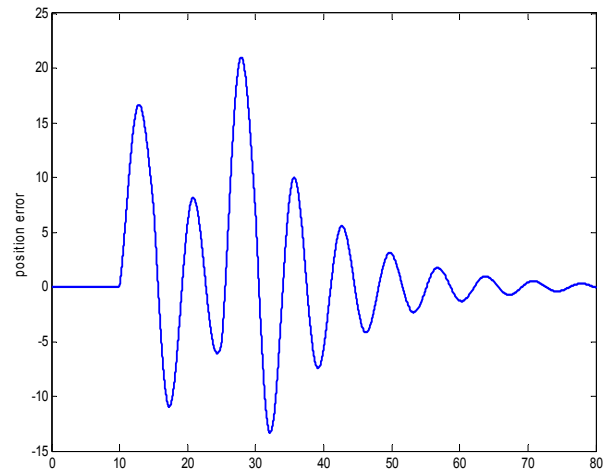


شکل ۵: سیگنال خطای ردیابی ربات پایه و پیرو به ازای بازه نمونه‌برداری ۰/۱۸ ثانیه و بهره‌های کنترلی افزایش یافته.

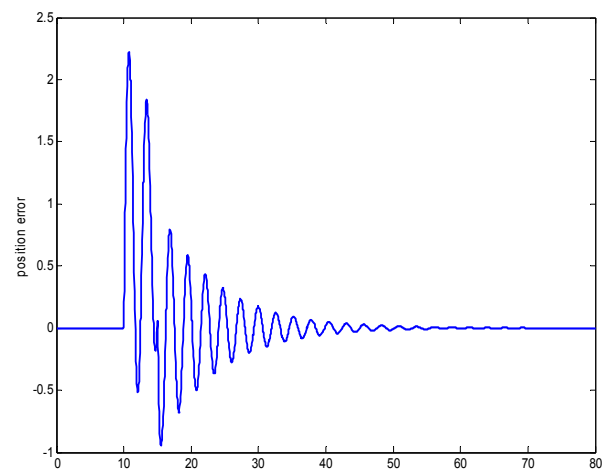
در پایداری نمایی سیستم وارد نماید در قالب یک مسئله بهینه‌سازی محدب مطرح شده و حل گردید. ضمن نشان‌دادن مصالحه بین ضرایب کنترلی و زمان نمونه‌برداری، مشاهده گردید که چگونه زمان‌های نمونه‌برداری بزرگ که اصولاً منجر به بهره‌های کنترلی کوچکی می‌گردند می‌توانند شفافیت و کارایی عملکرد سیستم‌های کنترل از راه دور را دچار نقصان نمایند. این امر بیان‌کننده آن است که برخلاف اکثر کارهای قبلی در این حوزه، زمان نمونه‌برداری نیز باید مورد مطالعه قرار بگیرد زیرا نادیده گرفتن آن هم پایداری و هم شفافیت سیستم را تحت تأثیر قرار می‌دهد. به عنوان پیشنهاد برای کارهای آینده می‌توان نمونه‌بردار غیر یکنواخت را به حالت چندرنخی در نظر گرفت، بدین معنا که سیگنال‌های موقعیت، سرعت یا نیرو را بسته به ماهیت آنها با نرخ‌های متفاوت نمونه‌برداری کرد. همچنین می‌توان تحلیل انجام‌گرفته را به سیستم‌های کنترل از راه دور با دینامیک غیر خطی نیز تعمیم داد.

مراجع

- [1] P. F. Hokayem and M. W. Spong, "Bilateral teleoperation: an historical survey," *Automatica*, vol. 42, no. 12, pp. 2035-2057, Dec. 2006.
- [2] T. Hu, X. Huang, and Q. Tan, "Time delay prediction for space teleoperation based on non-gaussian auto-regressive model," in *Proc. of Int. Conf. on Modelling, Identification & Control, ICMIC'12*, pp. 567-572, 24-26 Jun. 2012.
- [3] S. Soyly, F. Firmani, B. J. Buckham, and R. P. Podhorodeski, "Comprehensive underwater vehicle-manipulator system teleoperation," in *Proc. OCEANS*, 8 pp., 20-23 Sept. 2010.
- [4] W. Wei and Y. Kui, "Teleoperated manipulator for leak detection of sealed radioactive sources," in *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, ICRA'04*, vol. 2, pp. 1682-1687, 26 Apr.-1 May 2004.
- [5] K. Y. Kim, H. S. Song, J. W. Suh, and J. J. Lee, "A novel surgical manipulator with workspace-conversion ability for telesurgery," *IEEE/ASME Trans. on Mechatronics*, vol. 18, no. 1, pp. 200-211, Feb. 2013.
- [6] S. Hirche and M. Buss, "Human-oriented control for haptic teleoperation," *Proceedings of the IEEE*, vol. 100, no. 3, pp. 623-647, Mar. 2012.
- [7] B. Willaert, D. Reynaerts, H. Van Brussel, and E. B. Vander Poorten, "Bilateral teleoperation: quantifying the requirements for and restrictions of ideal transparency," *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, vol. 22, no. 1, pp. 387-395, Jan. 2014.
- [8] S. Islam, P. X. Liu, and A. El Saddik, "New stability and tracking criteria for a class of bilateral teleoperation systems," *Information Sciences*, vol. 278, pp. 868-882, Sept. 2014.
- [9] J. Li, M. Tavakoli, and Q. Huang, "Stability of cooperative teleoperation using haptic devices with complementary degrees of freedom," *IET Control Theory & Applications*, vol. 8, no. 12, pp. 1062-1070, 14 Aug. 2014.



شکل ۶: سیگنال خطای ردیابی ربات پایه و پیرو به ازای بازه نمونه‌برداری ۰/۱۸ ثانیه در حضور اغتشاش پایه‌ای.



شکل ۷: سیگنال خطای ردیابی ربات پایه و پیرو به ازای بازه نمونه‌برداری ۰/۱۸ ثانیه.

انجام داد. برای مثال برای سیستم بحث‌شده به ازای بازه نمونه‌برداری ۰/۱۸ ثانیه، هر چند که سیستم پایدار می‌باشد ولی خطای تعقیب مسیر پایه و پیرو در شکل ۷ نشان داده شده است.

حال با افزایش بهره‌های کنترلی به $K_p = 100$ و $K_d = 50$ و کاهش زمان نمونه‌برداری به ۰/۱۸ ثانیه جهت حفظ پایداری، سیگنال خطا به صورت شکل ۸ خواهد بود. ملاحظه می‌گردد که با کاهش بازه‌های نمونه‌برداری می‌توان ضمن حفظ پایداری، شفافیت سیستم را افزایش داد. به عبارتی افزایش بهره‌ها سبب می‌گردد که ردیابی موقعیت ربات پایه توسط ربات پیرو دقیق‌تر صورت گرفته و خطای ردیابی سریع‌تر به سمت صفر میل نماید. ولی از آنجایی که به علت محدودیت‌های عملی نمی‌توان بازه‌های نمونه‌برداری را بیش از اندازه کوچک گرفت بایستی مصالحه‌ای بین پایداری و شفافیت سیستم‌های کنترل از راه دور صورت گیرد.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله سیستم‌های کنترل از راه دور گسسته خطی با ساختار نمونه‌بردار غیر یکنواخت مورد مطالعه قرار گرفت. ربات پیرو و پایه به صورت یک سیستم خطی پیوسته با زمان در نظر گرفته شد که سیگنال‌های خروجی آنها قبل از ورود به کنترل‌کننده به صورت غیر یکنواخت نمونه‌برداری می‌شوند. شرایط کافی برای پایداری نمایی این سیستم‌ها با استفاده از تابع لیاپانف پیشنهادی و در فرم معادلات LMI ارائه گردید. همچنین کران بالای زمان نمونه‌برداری به گونه‌ای که خللی

- [30] M. Moarref and L. Rodrigues, "On exponential stability of linear networked control systems," *International J. of Robust and Nonlinear Control*, vol. 24, no. 7, pp. 1221-1240, May 2014.
- [31] J. Lofberg, "YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB," in *Proc. IEEE Int. Symp. on Computer Aided Control Systems Design*, pp. 284-289, 2-4 Sept. 2004.
- [32] D. Lee and M. W. Spong, "Passive bilateral teleoperation with constant time delay," *IEEE Trans. on Robotics*, vol. 22, no. 2, pp. 269-281, Apr. 2006.
- [33] R. Oboe and P. Fiorini, "A design and control environment for internet-based telerobotics," *International J. of Robotics Research*, vol. 17, no. 4, pp. 433-449, 1998.
- [34] D. Lee and M. W. Spong, "Passive bilateral control of teleoperators under constant time-delay," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 38, no. 1, pp. 109-114, 2005.
- [35] S. Hirche and M. Buss, "Packet loss effects in passive telepresence systems," in *Proc. 43rd IEEE Conf. on Decision and Control, CDC'04*, pp. 4010-4015, 14-17 Dec. 2004.
- [36] J. K. Hale and S. M. V. Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, vol. 99, Springer Science & Business Media, 2013.
- [37] E. Fridman, "A refined input delay approach to sampled-data control," *Automatica*, vol. 46, no. 2, pp. 421-427, Feb. 2010.
- [38] P. Naghshabrizi, J. P. Hespanha, and A. R. Teel, "Exponential stability of impulsive systems with application to uncertain sampled-data systems," *Systems & Control Letters*, vol. 57, no. 5, pp. 378-385, May 2008.
- [10] E. Nuno, L. Basanez, C. Lopez-Franco, and N. Arana-Daniel, "Stability of nonlinear teleoperators using PD controllers without velocity measurements," *J. of the Franklin Institute*, vol. 351, no. 1, pp. 241-258, Jan. 2014.
- [11] G. Leung and B. Francis, "Bilateral control of teleoperators with time delay through a digital communication channel," in *Proc. of the Annual Allerton Conf. on Communication Control and Computing*, pp. 692-692, 1992.
- [12] K. Kosuge and H. Murayama, "Bilateral feedback control of telemanipulator via computer network in discrete time domain," in *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, vol. 3, pp. 2219-2224, 25-25 Apr. 1997.
- [13] S. Stramigioli, "About the use of port concepts for passive geometric telemanipulation with varying time delays," in *Proc. to Mechatronics Conf.*, pp. 944-953, 24-26 Jun. 2002.
- [14] I. Polushin and H. Marquez, "Stabilization of bilaterally controlled teleoperators with communication delay: an ISS approach," *International J. of Control*, vol. 76, no. 8, pp. 858-870, Aug. 2003.
- [15] J. Artigas, C. Preusche, G. Hirzinger, G. Borghesan, and C. Melchiorri, "Bilateral energy transfer in delayed teleoperation on the time domain," in *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, ICRA'08*, pp. 671-676, 9-23 May. 2008.
- [16] J. E. Colgate and G. G. Schenkel, "Passivity of a class of sampled-data systems: application to haptic interfaces," *J. of Robotic Systems*, vol. 14, no. 1, pp. 37-47, Jan. 1997.
- [17] J. J. Gil, A. Avello, A. Rubio, and J. Florez, "Stability analysis of a 1 dof haptic interface using the Routh-Hurwitz criterion," *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, vol. 12, no. 4, pp. 583-588, Jul. 2004.
- [18] N. Diolaiti, G. Niemeyer, F. Barbag, and J. K. Salisbury Jr., "Stability of haptic rendering: discretization, quantization, time delay, and coulomb effects," *IEEE Trans. on Robotics*, vol. 22, no. 2, pp. 256-268, Apr. 2006.
- [19] J. H. Ryu, D. S. Kwon, and B. Hannaford, "Stable teleoperation with time-domain passivity control," *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, vol. 20, no. 2, pp. 365-373, Apr. 2004.
- [20] A. Jazayeri and M. Tavakoli, "A passivity criterion for sampled-data bilateral teleoperation systems," *IEEE Trans. on Haptics*, vol. 6, no. 3, pp. 363-369, Jul-Sept. 2013.
- [21] A. Jazayeri and M. Tavakoli, "Absolute stability analysis of sampled-data scaled bilateral teleoperation systems," *Control Engineering Practice*, vol. 21, no. 8, pp. 1053-1064, Aug. 2013.
- [22] A. Haddadi and K. Hashtrudi-Zaad, "Least conservative robust stability condition for linear bilateral teleoperation control systems," in *Proc. Third Joint EuroHaptics Conf. and Symposium on Haptic Interfaces for Virtual Environment and Teleoperator Systems World Haptics*, pp. 220-225, 18-20 Mar. 2009.
- [23] Y. C. Tian and D. Levy, "Compensation for control packet dropout in networked control systems," *Information Sciences*, vol. 178, no. 5, pp. 1263-1278, 1 Mar. 2008.
- [24] T. C. Yang, "Networked control system: a brief survey," *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, vol. 153, pp. 403-412, Jul. 2006.
- [25] W. Chen and L. Qiu, "Stabilization of networked control systems with multirate sampling," *Automatica*, vol. 49, no. 6, pp. 1528-1537, Jun. 2013.
- [26] M. Fu and L. Xie, "The sector bound approach to quantized feedback control," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 50, no. 11, pp. 1698-1711, Nov. 2005.
- [27] M. Cloosterman, N. van de Wouw, M. Heemels, and H. Nijmeijer, "Robust stability of networked control systems with time-varying network-induced delays," in *Proc. 45th IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 4980-4985, 13-15 Dec. 2006.
- [28] P. Naghshabrizi, J. P. Hespanha, and A. R. Teel, "Stability of delay impulsive systems with application to networked control systems," *Trans. of the Institute of Measurement and Control*, vol. 32, no. 5, pp. 511-528, 9-13 Jul. 2010.
- [29] K. Liu and E. Fridman, "Networked-based stabilisation via discontinuous Lyapunov functionals" *International J. of Robust and Nonlinear Control*, vol. 22, no. 4, pp. 420-436, Mar. 2012.

امیر امین‌زاده قوی‌فکر متولد سال ۱۳۶۶ در شهر تبریز، مدرک کارشناسی و کارشناسی‌ارشد مهندسی برق خود را به‌ترتیب در سال‌های ۱۳۸۸ و ۱۳۹۱ در گرایش کنترل از دانشگاه تبریز دریافت نموده و هم‌اکنون دانشجوی مقطع دکتری، در دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تبریز می‌باشد. زمینه‌های تحقیقاتی موردعلاقه نام‌برده شامل موضوعاتی همانند کنترل غیرخطی، سیستم‌های کنترل از راه دور، سیستم‌های کنترل شبکه‌ای، کنترل دیجیتال، کنترل چند نرخ و بازوهای رباتیک می‌باشد.

امیر ریخته‌گر غیائی متولد سال ۱۳۵۴ در شهر تبریز، مدرک کارشناسی‌ارشد و دکتری مهندسی برق خود را به‌ترتیب در سال‌های ۱۳۸۰ و ۱۳۸۹ در گرایش کنترل از دانشگاه خواجه‌نصیرالدین طوسی و تبریز اخذ نموده است. ایشان از سال ۱۳۹۳ مدیریت گروه مهندسی کنترل دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تبریز را به عهده داشته و همچنین به‌عنوان دانشیار مشغول به فعالیت در این دانشکده می‌باشد. زمینه‌های علمی موردعلاقه نام‌برده شامل موضوعاتی همانند کنترل غیرخطی، سیستم‌های ابعاد بزرگ، سیستم‌های کنترل شبکه‌ای، سیستم‌های کنترل از راه دور و بازوهای رباتیک می‌باشد.

محمدعلی بادامچی‌زاده متولد سال ۱۳۵۴ در شهر تبریز، مدرک کارشناسی مهندسی برق خود را در سال ۱۳۷۷ در گرایش الکترونیک و مدرک کارشناسی‌ارشد و دکتری خود را به‌ترتیب در سال‌های ۱۳۸۰ و ۱۳۸۶ در گرایش کنترل از دانشگاه تبریز دریافت نموده است. ایشان هم‌اکنون استاد تمام دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تبریز می‌باشد. زمینه‌های علمی موردعلاقه نام‌برده شامل موضوعاتی همانند کنترل تطبیقی، سیستم‌های مرتبه کسری، آنالیز پایداری سیستم‌ها و شناسایی سیستم می‌باشد.

فرزاد هاشم‌زاده متولد سال ۱۳۶۰ در شهر ماکو، مدرک کارشناسی خود را در سال ۱۳۸۲ در رشته مهندسی پزشکی از دانشگاه صنعتی امیرکبیر و مدرک کارشناسی‌ارشد در رشته مهندسی برق را در سال ۱۳۸۵ از دانشگاه تهران اخذ نمود. ایشان در سال ۱۳۹۱ موفق به دریافت مدرک دکتری در رشته مهندسی برق - کنترل از دانشگاه تبریز گردید. در سال ۱۳۹۰ دوره تحقیقاتی یک‌ساله را در آزمایشگاه TBS در دانشگاه آلبرتا در کشور کانادا گذرانده و پس از بازگشت به ایران و اتمام مقطع دکتری تدریس در دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تبریز را آغاز نمود و هم‌اکنون به‌عنوان دانشیار مشغول به فعالیت در این دانشکده می‌باشد. زمینه‌های علمی موردعلاقه نام‌برده شامل موضوعاتی مانند کنترل مقاوم و غیرخطی، هپتیک، سیستم‌های کنترل از راه دور، سیستم‌های تاخیردار و سیستم‌های کنترل شبکه‌ای می‌باشد.